

古今交食週期比較論

高 平 子

(一) 本論旨趣：董氏新得週期——陳氏國聞週報發表的週期——我在「科學」發表的舊論文——改寫的必要。

(二) 週期的觀念：天文動態甚至人事動態的複合週期性——中外古今對於天文週期的注意。

(三) 尋求週期的一種算術：從秦道古「大衍求一術」化出的一種特殊算法——交食可能的限度，附食限表——尋求週期算術詳草三題，附篇末：1. 用朔實與半交周年爲基數 2. 用朔實與半交周月爲基數 3. 借用崇天曆用數爲基數。

(四) 週期的比較：(甲) 比較用各要素——應用天文常數表——比較要素的分析：1. 入交差 2. 日分差 3. 入氣差 4. 卑點年差 5. 入轉差 (乙) 各週期的來歷：西方古週期「沙羅士」——漢書二種週期——最近檢得的三種中法古週期：1. 劉洪乾象曆週期 2. 何承天元嘉曆週期 3. 一行大衍曆週期——牛根氏三種週期——近人陳朱董三氏的週期——新選二種週期。(丙) 就一週後的比較(比較表第一第三)——表的製法——週期短長的意義——各週可用的次數——牛甲週入交差的特佳——董週的特性——大衍倍週的注意 (丁) 就某一時代應用上的比較(比較表第二第四)——以二千五百年左右爲例——各週可用倍數的不同——沙羅士，二漢週，朱，董，等五個週期都出食限——各週性質和應用價值與就一週後的比較大不相同。

補遺：馮恂週期——王漢週期。

(一) 本 論 旨 趣

最近董作賓先生因研究殷代年曆而偶然發見一種93年的月食週期：在一次月食經歷93年之後，常再有一次月食發生於陰曆同月的望日，而且前後的日名干支相同。這

在天文學上是一個新發見的週期，但在年曆學上可能是一種意外的障礙。因為在考古學上如能從古文或古物上找到某一個節候的月份某一個干支的日辰有一個確定的日食或月食，這可以在相當長的一段歷史年代中推定它的年序，作為一個年曆的支點。現在這個93年週期既能把月份和干支的特性重複演出，則一個考定在某年的交食可以每閱93年重複適應，就是支點成為無定了。董先生告我此事並徵求我對於天文學上的意義。我覺得這個問題很值得研究，而研究的初步結論是：（1）這個新週期（尤其是月食）大約連續不過二次或三次，極少機會可至第四次；（2）一次月全食之後，次週普通是一個偏食，很少機會再遇全食；因此在月份干支之外尚可以交食的性狀來檢討，而可能的次數也很少，所以在年曆學上似乎也不是不可解決的障礙。

我在民國二十三年嘗因國聞週報（十一卷第四期起）登載陳振先先生所著秦末漢初之正朔閏法及其意義一文（當時只見其第七D節）其中論史記漢書之交食週期，論春秋日食記載之非出追推，及述其個人發明之1154年週期之經過，甚感興趣，因寫日食週期之新研究一篇，曾載中國科學社科學第十卷第七期。文中曾將漢書135月及634月二種週期，223月的沙羅士（Saros）週期，陳氏發明的14273月週期以及我自己檢得的358（甲），6444（乙），32578（丙），三種週期，共計七種交食週作一綜合性的研究。但我檢尋週期之法出於宋秦道古（九韶）之大衍求一術，前文未及詳述；而日後又知我所得的甲乙二種週期早經牛根氏（S.Newcomb）發表並研究，（見朱文鑫曆法通志第十九篇：漢曆交食與西法之異同，民廿三年十月商務印書館出版，牛氏原文未查得）；且乙丙二種週期以今視之並無特殊重要點；因此覺得前文的疏忽掛漏確有重寫的的必要。茲又適逢董先生之發見，故路採原著，整理鄙見，正前文甲乙二種之名，備舉牛氏三種週期為牛甲、牛乙、牛丙；增附朱氏董氏二種；又從漢唐間曆法中考見當時所用的三種：計後漢劉洪乾象曆一種，劉宋何承天元嘉曆一種，唐釋一行大衍曆一種；再加以我所選擇作為舉例的二種；連同原採巴比倫、漢書、陳氏等四種；共計一十四種，作一詳盡的理論上的比較，這是本文重寫的旨趣。

（二）週期的觀念

什麼是週期？廣義言之，凡一事物經歷一段相同時間後，重複顯現者，謂之有週

期性，這個時間就是週期。凡是循圓周運動的事物必然是有週期性，而天文學上的動態，尤其是屬於太陽系的更無處不表示其圓周運動而又不是完全的圓周運動，分析之或為有差率的圓周（例如橢圓），或為循螺旋進行的圓周（例如太陽系率諸行星向太空前進），或為諸種複合的圓周（例如衛星繞行及諸星攝動）。昔希臘人欲以完全圓周解釋天行，後人雖知其誤，然今日精密的天算公式，分析至最後階段，常演為成千累百的項目，其最大多數都是圓周函數（或稱三角函數），所以天文動態的本性不外是圓周運動的大複合，其有週期性是必然的，不過愈求精密愈趨複雜罷了。

我國古代曆法家對於週期之研究似乎特有興趣，所謂章、蔀、紀、元、都是週期，而且把五星行度和日月交食都曾列入週期之中。但是欲求週期之顯著，就不能不把一部份複雜的行動簡單化，這是一種刪繁就簡的趨勢，在天文學觀測的精密上講可能有嚴重的損害，在天文學的進步上也許是一個重大的阻力。但鑒於天文動態（甚至人事動態）的週期性的普遍而實在，以及這個觀念對於天文學的推動力的歷史，似乎還有其研究的價值。

中國古代對於日食之注意（如書經詩經春秋）人多知之，然而未聞有週期之流傳。至漢書律曆志劉歆三統曆說始見有 135 月之週期，名為「朔望之會」；還有一個 6345 月之大週期，名為「會月」。這個會字在古書裏大都作為日月交食的解說。

迦勒底人很早（大約在西元前第六世紀）就得到了 223 月的交食週期名為 Saros「沙羅士」，其意即復臨。這是古今最有名的交食週期。

日本飯島忠夫至以詩經春秋諸日食係後人用西方傳來之沙羅士週期逆推而得，並非當時實測的紀錄（據陳振先文）。陳君駁之。以為沙羅士週期之應用自頭至尾全球不過六十餘週，若在我國疆域而論，則不過二十餘週（約 450 年左右）。魯隱公三年（西元前 720 年）日食至戰國末期（約西元前 288 年）系統早絕，雖有沙羅士週期之知識而無從逆推，且逆推必致誤，（陳文大意如此，）以見中國之日食紀錄與日食週期乃是獨立發展與沙羅士無涉，其說甚當。

陳君自己也發見一種 1154 年或 14273 月的長週期，其入交差和入氣差（意義見下文）都很微小，可以做歷史上久遠的取證。

董君的 93 年週期是未經前人提過的一種最近發見。

(三) 尋求週期的一種算術

古人的發見日月食週期大概總是先有日月食的紀錄，然後按日月食紀錄的時距比較得來。但我從宋代秦道古的數書九章「大衍求一衍」一篇裏曾經找到唐宋所謂「演紀」的一種路線，就是中國曆法推求上元的方法，也就是從觀測得來的數量推求簡化週期的方法。我就大致遵循秦氏算法試求日月食的週期。這種算法結果和連分數相通，但我相信秦氏確有他自己的或者唐宋相傳的方法，大概和九章算術的「約分」及孫子算經的「三三數之」一題也有密切的關係。我對於秦氏的大衍求一術曾經做過一次詳細研究，（篇名大衍術論見震旦學院理科雜誌卷期數待查，約在民國七八年間出版），但用秦氏術略加修改而成的求週期法以前從未發表。要詳述從大衍術到求週期法的理論和異同，寫起來太長了，所以我只舉出三個實例的詳草附列篇末以供同好討論之資。

交食的主要現象「食甚」或日月兩心（在月食則為月和日的對照點）距離最近的時刻並不正是朔望的時刻，但相差常甚微小。所以在討論交食週期的問題內，可以拿朔望作為交食時刻的標準。交食實現的條件是須地日月三體的一線相直，或所差不遠。就東西而論，須要日月同經度（即朔）或對照（即望）；就南北而論，須要月緯度離黃道不遠，因為太陽常在黃道上。這樣月的影錐可以射及地面而為日食，或地的影錐掃過月面而為月食。要月緯度離黃道不遠（日緯度常近於0）就須合朔（或望）時日月二體的黃經度離黃白道交點在某種限度以內。今據揚氏（Charles A. Young）的普通天文學，日食限度：大限 $18^{\circ}31'$ ，小限 $15^{\circ}21'$ ；月食限度：大限 $12^{\circ}15'$ ，小限 $9^{\circ}30'$ ，所謂大限者，限外不能有食，限內可能有食；所謂小限者，限外可能有食，限內必定有食。但月行和日行速度不同，而黃白交點也有本行，所以如果要改為時間言之（指朔或望和日月各自走到黃白交點的時距）就日行而論，則日食限度：大限約19.4日，小限約15.0日，（據牛根氏作大限20.8日小限14.2日）；月食限度大限約13日，小限約9日，就月行論，則日食大限約1.6日，小限約1.0日；月食大限約1.0日，小限約0.6日。

食限略表：

		距交度數	距交日行	距交月行
日	大限	18°31'	日 19.4	日 1.6
食	小限	15°21'	15.0	1.0
月	大限	12°15'	13.0	1.0
食	小限	9°30'	9.0	0.6

註：這表內距交度數係據

Charles A. Young 氏

Gen. Astronomy 距

交日行和距交月行係

我用日月行速約略推

算，可能頗有出入。

今設欲求日食週期，依上節所論，就是應求合朔（月食用望）和日行到黃白交點的時距不大過「距交日行」的限度，或者和月行到交點的時距不大過「距交月行」的限度。朔望和日行到交點的比較，是須用「朔實」（即朔望月的平均數）和「交周年」相比。「交周年」或稱「交食年」，即太陽自黃白交點再至此交點之時間，惟因周天有昇降二交點，所以實際可用「半交周年」，這就是例題第一章所用的兩基本數。朔望和月行到交點的比較，是須用「朔實」和「交周月」相比。「交周月」或稱「交點月」，即太陰自黃白交點再至此交點之時間，實際可用「半交周月」，這就是例題第二章的兩基本數。

例題的算法和行列大概以秦氏大衍求一術做模範，但以現代所用阿拉伯數目字更易宋人的籌算式寫法。求法大略如下：

第一題以「朔實」與「半交周年」（皆據現代用數）相求。算格每層分中左右三列。第一層中列置基本二數，上小下大，上法下實。立天元一於右列上行，空右列下行。所謂「立天元一」係宋人術語，就是置一個單位籌或寫一個單位1；「空」就是不置籌或寫一個0。空左列上行，立天元一於左列下行。大衍術原無左行，今增置。乃以中列法除實，即上除下，商數得5，置於法數之右附列。以商數5乘中左右各同行數，以各乘積分置於各列實數之下，加括弧為別。乃以中左右各行上數重寫於第二層上行，以中列乘積減中列第一層下數，得數為第二層中列下數；以左右列乘積加左右列第一層下數，得數為第二層左右列下數。乃以中列第二層下數為法上數為實。法除實，商得1，置於第二層法數之右附列。以商數1乘中左右各同行數，以各乘積分置於各列實數之上，加括弧為別。乃以同法求第三層各數。直至中列上數或下數減盡得0

爲止。此時左右列相當之數即等於原用兩基本數除去小數點。

這一個算草大致是依據宋人秦道古（九韶）的大衍求一術，但原書是用籌算字碼（即ⅠⅡⅢⅣⅤⅥⅦⅧ或一三三三三三三三及○等代籌號碼寫的，現在改用阿拉伯字碼。而且原本因籌算的便利，隨乘隨減隨加，所以不寫乘積，今爲算式的明白計，增寫乘積且加括弧爲別。又中列是輾轉相除，即九章算術之約分法，但上下行數各保本位，所以每層法實上下互易。

從這個算草裏我們就可以看到：

1. 這種算法與連分數很相近。
2. 中列末數必至0；次末數倘爲1，即基本二數相爲質數；倘不爲單一，則此數即爲基本二數的最大公約數。
3. 無論何層右列一數與上行基本數（本題之朔實）之乘積減去左列同行數與下行基本數（本題之半交周年）之乘積，常等於中列同層同行之數。上行者常爲正數，下行者常爲負數。
4. 無論何層何行，以右列一數爲母，左列一數爲子，此分數常可爲 $\frac{\text{上行基本數}}{\text{下行基本數}}$ 之簡化分數，層數愈下，則其值與原分數亦愈近。
5. 就本題而論，以無論何層之右列一數（舉例如88）作爲日食週期之月數，則其相對之左列數（15）即爲半交周年數，其相對之中列數（-0.95...）即爲週末合朔和日行到交點的時距，以一日爲單位，負號指入交在合朔後。
6. 從本題第三層中列上數起都已降至食限表距交日行小限（15.0日）以內，所以從同行右列數以下（6,41,47,...）都可作爲日食週期的月數。從此可見交食週期之數雖非無限，却是甚多，而且依本法所求得亦止是週期較短，差數較小的一個系統，不能盡所有的週期。但幾個有名的週期如漢三統曆的週期（135月在第7層），沙羅士週期（223月在第8層），牛根氏週期（358月在第9層），都已包括在這個系統之內。

第二例題係取「朔實」與「半交周月」爲基數。第一層因朔實較大在下行，所以各週期的朔望月數應看左列，半交周月數應看右列。

在這一題內，用爲比較的是半交周月，就是月行兩交點間的日分數，所以中列各餘

數是合朔距交點的月行日數而不是日行日數。依食限表，日食大限1.6日，小限1.0日；月食大限1.0日，小限0.6日；從算草可見第4層下行(0.30...)以下都入食限。

所得各週期，至第12層(4519)為止，與第一題盡相同，以後漸有歧異，乃因所用基數間有微小不符之處。

以上二例題是用的現代最進步最通行的日月行度平均常數(據美曆書錄出)，古今雖有小變，其變甚微，無大影響。

第三例題則試取古代所用常數以作證驗。茲取崇天曆常數以備一例。查宋崇天曆(行用於西紀1024年至1031年間)

樞法：10590

朔實：312729分

交中：144088.71385分

朔實即朔望月之分數；交中即半交周月之分數及餘尾；樞法即分母，亦即一日的分數，以樞法除前二數即得朔實及半交周月之日數及日下餘分。現在即用原列分數但截小數一位以求簡省，列算如第三章，即可見所得週期自第1至第10層(358)各數與用現代常數者盡同，以後漸有歧異，這是由於用數的小差。但從此可見主要的週期在古人亦儘可求得，不一定需要現代常數。

(四) 週期的比較

(甲) 比較用各要素

由上所論可見交食週期為數極多，所以單說發見一個週期，並無多大意義，必須這一週期有某種特殊性質，方有討論或流傳的價值。欲知週期的性質或優劣，須從多方面觀察之。現在先把需用的日月行度常數依現代最通行者彙列於此，再將比較上須要認清的各差數意義分析於後。

常數(據 A. E. and N. A. for 1940, 但截至六位小數):

歲實或回歸年.....365.242199,

卑點年.....365.259641,

交周年即交食年.....346.620031,

半交周年.....	173.310015,
朔實或朔望月.....	29.530588,
轉周或卑點月即近點月.....	27.554550,
交周月即交點月.....	27.212220,
半交周月.....	13.606110.

各差數需要分析者約有六種：

1. 「入交差」如果某一個合朔時太陽太陰都適當黃白道的交點，那是一個最理想的交食。通常一個合朔時太陽太陰總和交點有一些距離，只要距離不太大，不出食限，就可以有一個交食發生。從合朔到太陽過交點的時距，我們稱為「太陽入交差」；從合朔到太陰過交點的時距，我們稱為「太陰入交差」。以一週期之月數乘「朔實」之積為「週期積日」，用「半交周年」除之，商數為「半交周年數」，餘數（可正可負，但用最小絕對值），即「太陽入交差」。置「週期積日」用「半交周月」除之，商數為「半交周月數」，餘數即「太陰入交差」。交在朔前，餘數常正；交在朔後，餘數常負。自然這是交食週的最要性質，因為依食限表如果太陽入交和合朔的時距超過日食的「距交日行」的大小限或太陰入交和合朔的時距超過「距交月行」的大小限，就不可能或不一定有日食。同樣情形見於月食。但這是假定週初無差而言，如果計入週初之差，則應與週末之差，同號相加，異號相減，所以週末之差可能增至一倍而未出食限。如果超過此等限度，就不能有食，即根本失其週期性。而且此等限度係就全地球而論，倘就某一地域（例如中國）而論，則限度還須大為縮小。再則入交差對於日食之另一觀點為影錐所指之地面緯度之差別，蓋黃白道互相斜交，故入交差愈大，則日月緯度差亦愈大，因而影錐之斜度差亦愈大，即所指地面之緯度差亦愈大，即見食的地域南北差亦更大。
2. 「日分差」此指一週之末日月食時分在一日中之百分數，亦即週期積日單位下之零分。此數為0，則先後兩食見食早晚相同，（當然就平行且不計視差而言）。倘此數為0.50，則為最大差，將見一食在晝，一食在夜。倘此數為正或負0.33，則晨食變為晚食，晚食變為夜食，或反其次序，三週而復原，沙羅士週和漢小週即是此種情形。就地面言之，則日分差可以決定影錐所指之地面經度：0.00則見食中點經度

不變；0.50 則食在東西差半個地球處；0.33 則差一百二十度即距地球三分之一週的地點。

3. 「入氣差」此指一週之末合朔及太陽回至週初同節氣之時差數。置週期積日，用「歲實」除之，商數為「太陽年數」即「回歸年數」亦即「周歲」數，不盡數為「入氣差」。此差愈小，則日食之復臨愈近於週初相同之節氣或陽曆日，而陰曆「月建」亦愈多相同之機會。但此在日食現象上關係似頗小。月食入氣差意義相仿。

4. 「卑點年差」此指一週之末太陽「平引角」(Mean anomaly) 與回至週初時相同平引角之時距。太陽自其橢圓軌道（當然指視象）最卑點起算之平行角度名為「平引角」，自最卑點復至最卑點之時間稱為「卑點年」，中曆舊法直至元授時曆似尚以「最卑和冬至點相混」，所以日行盈縮都從冬至起算，未有卑點的觀念。置週期積日以「卑點年」除之，商得「卑點年數」，不盡為「卑點年差」。此差以半卑點年（約 182.6 日）為最大數。卑點年差一日約當於太陽平引角差一度弱。 $(360^\circ/365.25/2 = 0.4921^\circ)$

5. 「入轉差」此指一週之末太陰平引角與回至週初時相同平引角之時距。太陰自其本軌道最卑點復至最卑點之時間名為「卑點月」。此月的長度約 27.55 日和朔望月的長度約 29.53 日相差頗鉅，所以中曆舊法亦早有分別，稱為「轉周」，因此我們把它的差數稱為「入轉差」。置週期積日以「轉周」除之，商得「轉周數」或「卑點月數」，不盡為「入轉差」。入轉差以半轉周（約 13.8 日）為最大數。入轉差一日約當於太陰平引角差 13 度稍強。 $(360^\circ/27.55 = 13.07^\circ)$

上列各要素中，入交、入氣、日分、諸差都是用太陽太陰的平行度立論，然而太陽太陰行度各有「平」「實」之分。在平行雖是合朔，入交，如果實行距離太遠，則不但交食時刻大異，即其情形亦全不同，甚至應有而無，或應無而有，皆屬可能。所以要論交食週期，必須注意平實行差別的狀況。太陰、太陽平實行之差在理論天文學中推算本極繁重，其公式分析至最後階段，大都成為圓周函數之項，項數之多至於不可勝計，即其應算者亦有數百數千之多。但就其大體言之，則屬於「太陰平引角」及「太陽平引角」的正弦之二項為最要。此項當引角為 0 度或 180 度時仍各消滅；當引角為一直角（或正或負）時其值最大，在太陰可致合朔之差約達 0.41 日，在太陽可致

古今交食週期比較論

合朔之差約達 0.17 日。兩者倘適相合併，則可達半日以上。倘週末與週初之引角各近一直角而又正負相反，則兩次實行之差當倍於前數，可達一日以上。其餘無數項之小差尚未計在內，惟差之最大要素在於兩引角。但平引角與太陰太陽的平行度爲正比例，所以也和太陰入轉的時間或太陽距最卑點的時間爲正比例，所以有了「入轉差」和「卑點年差」就可以知道二種平引角的相對狀況，這是這兩種差數在週期比較上所以特爲注意的緣故。

另一觀點則從太陰太陽的引角可以推見太陰太陽距地的遠近。而太陰太陽距地遠近招致影錐寬度的不同或影錐尖端能否到地或到地多少的差別。所以入轉差和卑點年差的大小和見食情形極有關係。

(乙) 各週期的來歷

以上數種意義分析明白後，我們可以把中外古今所見各種週期作一有系統的比較。現在我先把提出比較的各週期來歷一述。

從來所知的交食週期要算迦勒底人 (Chaldeans) 所用的「沙羅士」週期 (Saros) 爲最早。我們還不知道這個週期是迦勒底人自己所發明的或是有所承受的，總之他們在西元前好幾世紀早已知道且作爲預推之用。「沙羅士」就是迦勒底語復臨的意思。這個週期以 223 個朔望月爲標準，以陽曆年計之普通有 18 年又 11 日又 $1/3$ 日。(或 10 日又 $1/3$ 日，倘期內適逢五個閏年。)

一百三十五月的週期見於漢書律曆志三統曆說。這是我國最古的週期。三統曆說爲王莽的國師劉歆所作，約在西元元年左右的作品，但三統曆的骨幹和太初曆並無不同，太初曆在西元前第二世紀業經行用，(元前 104 年至元後 84 年)，劉歆似不過就舊曆作成一種學說，至于這個交食週期是否也是太初曆所原有，還不能十分確定。

三統曆說還有一個 6345 月的週期。曆說稱 135 月週期爲「朔望之會」，又說「以會數 (四十七) 乘之則周於朔且冬至是爲會月 (六千三百四十五)」。「會」就是交會之意；「朔望之會」意思當是朔或望與交點相會之期。135 月無疑是一個交食週期，爲什麼又要用 47 倍的另一個週期呢？依我的解釋，是因爲 $47 \times 135 = 47 \times 5 \times 27 = 235 \times 27$ ，而 235 是三統曆一「章」的月數，就是合朔和冬至齊同一週 (19 年) 的月數。求 135 和 235 的最小公倍數 $47 \times 5 \times 27 = 6345$ ，就是在漢人的精密度內得到交食週期而且

至朔同日了。爲免辭句的混淆，以後稱135月爲「漢小週」，稱6345月爲「漢大週」。

我從漢人二種週期的研究，覺得後代的曆家對於此類週期應當也有興趣，料想中國所有週期決不止此二種。我最近試從後漢劉洪的乾象曆法，劉宋何承天的元嘉曆法和唐釋氏一行的大衍曆法內略一搜尋，果然各有一種交食週期，今名之爲「乾象週」、「元嘉週」和「大衍週」。這些週期前人頗少提及，朱文鑫氏的曆法通志內有專論中西交食週期的一篇，但除兩漢週外亦未注意及此。其故大概是因爲曆法原文諸數雜糅，隱而未見(注)。今將這三種週期如何檢出略述如下：

按乾象曆爲後漢人劉洪所造，但直至三國吳大帝黃武二年始行於吳，計自西元223年至280年。曆法見晉書律曆志，未明言交食週期，但其用數中有「會率一千八百八十二」，「歲實八百九十三」，此二數是推算交食的用數，其相比得 2.10750 ，顯見即爲「歲實」與「半交周年」之比(依現代數得 2.10745)。另依本曆法有「章歲十九」，「章月二百三十五」，其比即爲「朔實」與「歲實」之比。

$$\text{既有} \quad \frac{\text{歲實}}{\text{半交周年}} = \frac{1882}{893}, \quad \frac{\text{朔實}}{\text{歲實}} = \frac{19}{235}$$

$$\text{因此得} \quad \frac{\text{朔實}}{\text{半交周年}} = \frac{19}{235} \times \frac{1882}{893} = \frac{19}{5 \times 47} \times \frac{1882}{19 \times 47} = \frac{1882}{5 \times 47 \times 47} = \frac{1882}{11045}, \text{亦得}$$

11015 (朔實) = 1882 (半交周年)，即是 11045 個朔望月(乾象名爲「會日」)合有 1882 個半交周年，或 941 個交周年(乾象名爲「朔望合數」)。即 11045 月是一個交食週期。

元嘉曆法爲劉宋曆官何承天所造，行用於宋齊梁三朝，計自西元445至509年。依

(注)——朱氏曆法通志第五篇有一表列「大明曆」以下各曆的「交點月之日數」，而未詳言其如何得來，按交點月(本論作交周月)即太陰自一交點復至此交點之時間，與交食週期有密切關係，一週內應有整數之「交周月」或「半交周月」。試以本論下文第一表所列「積日」爲實，「半交周月」爲法，相除即得各該曆之「半交周月之日數」，倍之即爲「交周月之日數」。如此可得：

$$\left. \begin{array}{l} \text{三統曆} \\ \text{乾象曆} \\ \text{元嘉曆} \\ \text{大衍曆} \end{array} \right\} \text{交周月之日數:} \left\{ \begin{array}{l} 27,212487 \\ 27,212193 \\ 27,212190 \\ 27,212210 \end{array} \right.$$

由此四曆即可見交周月之得數與現代通用數 $27,212220$ 日正是逐漸接近。朱氏於大衍曆列 $27,21200$ 日，與今得微異，其他三曆則未列數。——

元嘉曆推合朔月食術本法，可見其所稱「會數一百六十」和「會月九百三十九」即是半交周年數和朔望月數的對比，即是 160 個半交周年合有 939 個朔望月，所以 939 月即是元嘉曆的交食週期。不過我目前所查的開明本翻清刻板的宋書裏「九百三十九」誤作「九百二十九」，但有他處文字可以證明其誤，且因板本參考不便，姑不詳辦。

大衍曆法爲唐釋氏一行所造，爲有唐一代名曆，行用於開元十七年至至德二年間（西元 729—757）。考唐書大衍曆法步交食用數內有：「交數四千三百六十九」，「交率三百四十三」，這兩數之比爲 $12.7376\cdots$ 和交周年與交周月之比極相密近，蓋即大衍一週期內的交周月數和交周年數。從這兩數，我們可以推知大衍週期的朔望月數必當是 4026，雖然沒有明言。因此再推得半交周年數是 686，半交周月數是 8738，如第一表所列。

中法的交食週期我相信還不止於這幾種，但目前姑且以此爲止。西法古代似只有沙羅士最爲流行，至近代牛根氏（S. Newcomb）始合併漢小週 135 月和沙羅士 223 月而爲 358 月的牛甲週。（此言牛氏用漢小週的月數，並非說牛氏知道漢書裏有這一個週期。）牛氏爲要消去日分差和入氣差，所以又把牛甲週三倍之再六倍之，成爲牛乙和牛丙週。據朱氏曆法通志說：「牛氏週十八倍（即 3×6 倍）日食復見於同月同日」，依我所算則尚有入氣差三日有餘，或因所用基數不同之故。

近人曾經討論或提出的交食週期，據我所知道的略有三種：（1）陳振先氏的 14237 月週期，見於國聞週報十一卷四期。（2）朱文鑫氏的 8 倍漢小週即 1080 月週期，見於曆法通志第十九篇。（3）董作賓氏的 93 年或 1150 月週期，爲董氏最近所發見。

我於上文曾經說過：交食週期即使在某種限度以內，其可能舉出的個數已是不可勝計，所以要做討論只能選取某種有特殊性質的週期。以上各種都是歷史相傳或至少有人提過，我現在再選取兩種附列於後以見選擇途徑的廣泛性。（1）簡週是尋求週期算草中所見比漢小週更簡單而可用的週期。（2）合週是試用漢小週的 17 倍和董週的配合。這兩種不過是無數可能的週期中選出的兩個舉例。

（丙）就一週後的比較（各表附篇後）

比較表以週期月數爲主，因交食的「食甚」即交食的中心雖與朔望時分不盡相同，然常所差微小，故表中以「平朔」（或「平望」）爲交食復臨的標準。表中「月數」一

列即爲各週期的朔望月整數。以週期「月數」乘「朔實」爲週期「積日」見第三列。積日下取小數二位爲「日分差」，倘小數過半日以上，反減一日，餘置負號，皆見第四列。置「積日」以「歲實」除之，商得「年數」，餘爲「入氣差」(正)。置「積日」以「半交周年」除之，商得「半交周年數」，餘爲「太陽入交差」(正)，入交差大於食限「距交日行」者無食，不成週期。置「積日」以「半交點月」除之，商得「半交點月數」，餘爲「太陰入交差」(正)，入交差大於食限「距交月行」者無食，不成週期。「距交日行」及「距交月行」均見前列食限略表。置「積日」以「轉周」除之，商得「轉周數」，餘爲「入轉差」(正)。置「積日」以「卑點年」除之，商得「卑點年數」，餘爲「卑點年差」(正)。以上自歲實以後各除法，倘餘數大於除數之半，即應增商數一單位而取負餘數爲各差數。舉例如以歲實365.242199除漢小週積日，倘用商數10，則得餘數334.40...大於歲實之半，即應改商11爲年數，以11乘歲實之積大於漢小週之積日，故其較31.03...爲負號餘數，即爲「入氣差」(負)。其他各差求法仿此。自歲實以後各商數及差數見第五列及以後各列。以上所用「朔實」等各常數均見第(甲)節所列常數表。

今就比較表第一表及第三表觀之，則各週期性質之異同和優劣大概即可明瞭。有數點可特爲注意的，指出於下：

凡週期短者容易發見，長者難顯。且週期短而入交差微則可用之週數頗長，而一週內各食既經推定或測見之後，可以移用以作推測他週內各交食之基本，此法非長週所能應用。但短週久必漸差以至系統斷絕，長週則可作歷史遠期的印證，此所以第三表有短長性的一列。

凡入交差愈小，則影錐每週掃過地球的偏差愈小，能掃過的次數愈多。漢小週與沙羅士週入交差可相匹敵，所以影錐掃過地球之次數亦大略相仿(約六七十次)。但漢小週每次合朔都比入交更遲(因差數正)，所以每食在黃道上都比交點更向東移；沙羅士則相反，每食都比交點更向西移。再則沙羅士的半交周年數是雙數，所以每次都是同一交點，即同爲昇交點或同爲降交點，影錐所指漸次由北而南或由南而北；漢小週的半交周年數是單數，所以每次交點升降互易，影錐所指也是南北遞改。沙羅士週期之存續以全球而論雖可達70次之多，但就一區域如中國而言，則至多不過二十餘次，

總延亘約三百餘年而一系遂絕，陳振先氏曾以此點爲據反駁日本飯島教授之說。漢小週之存續次數大約相同而週期較短，故中國可用時期一系不過二百餘年。

漢大週是小週的47倍，雖未全出食限（指交點前後合計）總是最疏的一個。但入氣差祇2日有餘，相當小，這是漢人製此週的目的，（漢人認爲入氣無餘）。卑點年差也小，這和入氣相連；入轉差也很好（列第二位），這可稱爲巧合。

從例題第一章右列觀察之，第七層135月即漢小週，第八層223月爲沙羅士週期月數，第九層358月的週期却令入交差（即中列餘數）突然縮小至0.04日以下，在第三表上昇至第一位，但是入氣差，卑點年差和入轉差，都並不太好。再以18倍之得6144月週期，這三種差數都大爲改善。我從前在「科學」的論文中認這後兩種週期爲新得，後來才知牛根氏早已得之，這實在是當時的疏忽和謬陋。牛氏還用過3倍358月的週期，那是因爲入轉差的特佳（列第二位）。現在表中把這三種週期列爲牛甲、牛乙、牛丙。其中還是以牛甲週最爲重要，因爲年數最爲簡短，而入交差特小（列第一位），三百週後差數尙不足12日，即仍未出食限，但300週約合8700年已包括有史以來而有餘。

最近所檢得三種中法古週期中，元嘉、大衍、入交差均佳，略可與沙羅士或漢小週相比，乾象則已疏遠。日分差亦以元嘉、大衍爲勝。入氣差則乾象爲佳，大衍最疏。卑點、入轉、亦均乾象爲佳。

近人陳氏週入交、入氣、日分、等差均特佳，惟週期太長，祇適於某種特殊佐證。

朱氏週本屬偶然提及，除日分差外未見有特異處。卑點、入轉、兩差疏遠，實際作用尤可減低。

董氏週積日以60除之適盡，故次週交食日期之日名干支不變，至6週後日分差積成1日，干支始進一位。入氣差爲-7.34...日，即每週交食比節氣約提早四分之一月，所以次週交食的「月建」，即陰曆月份，也大致不變，或退一位，但退位的機會在可能機會中的比例約如1與4之比，（即入氣差與朔實之比）。這樣日名和月建的不變是董週的特點。董週的入交差（-8.58...）雖然頗大，但日食也可連續四次或五次，月食則可連續三次或四次。不過這是就全地球而論。專論中國則日食大概不過能重見一次或二次，至月食則無地域關係，只要是在地平線上。又以月全食而論，其可能的食限不及普通食限1/2，所以交前交後合計也不到13日，因此董週月全食的重見不能超過

一次。再則董週卑點年差雖頗小，而入轉差頗大，所以「實朔」和「平朔」的差數可至一日以上，即日名干支就平朔雖然不變，在實朔很可以改易一位甚至二位，例如甲辰可變爲乙巳或癸卯甚至變爲丙午或壬寅。這些在年曆學上都頗有關係。

董週的六旬無餘爲其特點，遍查表中各週未見同此性質。惟有大衍週的積日2倍之也是六旬無餘，干支不變。而且2倍大衍週的入氣差（+5.623027日，年數651）和卑點年差（-3.714273日，卑點年數651）都比原週差數變小許多，當時一行是否見到這一性格而曾應用他的倍週，現在還沒有得到明證。陳氏週的6倍雖然也可用六旬除盡，但週期年數太長，毫無實用。

此外新選的有兩種週期爲例：

簡週是例題演草中比較漢小週更前一層的一個，它的太陽入交差已降至1日以內，這是入交差不足1日而又最簡短的一個（7年1月有餘），這是它的特點，但入氣、卑點年、入轉、諸差都不很小。合週是用17倍漢小週和一個董週合起來的，目的是在把入交差和入轉差都減得很小（列第二和第四位），日分差也跟着減小（列第五位），但是入氣差和卑點年差都近乎半年的最大值，可見各週都各有優劣。

（丁）就某一時代應用上的比較

以上都是用一週作比較的標準。如果要應用到長期的推算，譬如要上推或下推二千五百年左右交食的對照（大約自春秋時到現代的距離）則因各週本身的長短大有不同，所以應乘的倍數亦大不相同，因而各週期在應用上的價值亦大不相同。這從第二表和第四表上很可顯見。因太陰入交差和太陽入交差大致常相平行，所以第二表內略去不列。在第二表和第四表上，一覽就可看見兩漢週期、沙羅士、朱氏、董氏、等五個週期都已越出食限不能應用。入交、入氣、最好的倒是陳氏週，入交第二位是合週。簡週的一週入交差並不很小，較沙羅士約大一倍，但在長期後，沙羅士已不能應用，而簡週反可應用者，並非簡週始終未出食限，乃是出限後重複入限，這裏有一種週期的週期性在內。大衍的入交差相當小，離食限尚遠。乾象和元嘉的入交差出月食小限，未出月食大限和日食大小兩限，卑點年差却以大衍爲第一，入轉差牛甲和簡週相仿居先。牛氏三種週期入交差都在3日以上，均可適用，但他種差數各有不同，價值也互有參差。

卅九、八、三十、寫於臺北。

第一表——古今交食週期性質之比較表（以一週後各差爲標準）

週期名	月數	積日	日分差	年數(約)	入氣差	半交周年	太陽入交差
	月	日	日	年	日		日
沙羅士*	223	6 585.321124	+ 0.32	18	+ 10.961542	38	- 0.459446
漢小週	135	3 986.629380	- 0.37	11	- 31.034809	23	+ 0.499035
漢大週	6 345	187 371.580860	- 0.42	513	+ 2.332773	1 081	+ 23.454645
乾象週	11 045	326 165.344460	+ 0.34	893	+ 4.060753	1 882	- 4.103770
元嘉週	939	27 729.222132	+ 0.22	76	- 29.184992	160	- 0.380268
大衍週	4 026	118 890.147288	+ 0.15	326	- 178.809586	686	- 0.523002
牛甲	358	10 571.950504	- 0.05	29	- 20.073267	61	+ 0.039589
牛乙	1 074	31 715.851512	- 0.15	87	- 60.219801	183	+ 0.118767
牛丙	6 444	190 295.109072	+ 0.11	521	+ 3.923393	1 098	+ 0.712697
朱氏週	1 080	31 893.035040	+ 0.04	87	+ 116.963727	184	+ 3.992280
陳氏週	14 273	421 490.082524	+ 0.08	1 154	+ 0.584878	2 432	+ 0.126044
董氏週	1 150	33 960.176200	+ 0.18	93	- 7.348307	196	- 8.586740
簡週	88	2 598.691744	- 0.31	7	+ 41.996351	15	- 0.958481
合週	3 445	101 732.875660	- 0.12	279	- 169.697861	587	- 0.103145

第一表（續）

週期名	月數	半交周年	太陰入交差	卑豐年	卑點年差	轉周數	入轉差
	月		日		日		日
沙羅士	223	484	- 0.036116	18	+ 10.647586	239	- 0.216326
漢小週	135	293	+ 0.039150	11	- 31.226671	145	- 8.780370
漢大週	6 345	13 771	+ 1.840050	513	- 6.614973	6 800	+ 0.640860
乾象週	11 045	23 972	- 0.324460	893	- 11.514953	11 837	+ 2.136110
元嘉週	939	2 038	- 0.030048	76	- 30.510584	1 006	+ 9.344832
大衍週	4 026	8 738	- 0.041892	325	+ 180.763963	4 315	- 7.735962
牛甲	358	777	+ 0.003034	29	- 20.579085	384	- 8.996696
牛乙	1 074	2 331	+ 0.009102	87	- 61.737255	1 151	+ 0.564462
牛丙	6 444	13 986	+ 0.054612	521	- 5.163889	6 906	+ 3.386772
朱氏週	1 080	2 344	+ 0.313200	87	+ 115.446273	1 157	+ 12.420690
陳氏週	14 273	30 978	+ 0.006944	1 154	- 19.543190	15 297	- 11.668826
董氏週	1 150	24 96	- 0.674360	93	- 8.970413	1 232	- 12.970600
簡週	88	191	- 0.075266	7	+ 41.874257	94	+ 8.564044
合週	3 445	7 477	- 0.008810	279	- 174.564179	3 692	+ 1.477060

* 據英國航海通書 (The Nautical Almanac for 1932) 附錄曆法小史 (The Calendar)：沙羅士週期

當初以 223 個月合 6585 $\frac{1}{3}$ 日。本表積日用現代通用之朔實計算，所以積日小數與原用日數之餘數略

有不同。其他週期亦應注意此種差別。

第二表——假定下推二千五百年左右之各週各差比較表

週期名	月數	倍數	總月數	總年數 (約)	入交差	日分差	入氣差	卑點年差	入轉差
沙羅士	223	週	30 997	2 506	- 63.86	日	日	日	日
漢小週	135	229	30 915	2 500	- 59.03	—	—	—	—
漢大週	6 345	5	31 725	2 565	- 56.04	—	—	—	—
乾象週	11 045	3	33 135	2 679	- 12.31	+ 0.03	+ 12.18	- 34.54	- 6.41
元嘉週	939	33	30 987	2 505	- 12.55	+ 0.33	+ 132.62	+ 88.93	+ 5.28
大衍週	4 026	8	32 208	2 604	- 4.18	+ 0.18	+ 30.49	- 14.93	- 6.78
牛甲週	358	86	30 788	2 489	+ 3.40	- 0.26	+ 99.91	+ 56.50	- 2.19
牛乙週	1 074	29	31 146	2 518	+ 3.44	- 0.31	+ 79.83	+ 35.92	- 11.19
牛丙週	6 444	5	32 220	2 605	+ 3.56	- 0.45	+ 19.62	- 25.82	- 10.62
朱氏週	1 080	29	31 320	2 532	- 57.53	—	—	—	—
陳氏週	14 273	2	28 546	2 308	+ 0.25	+ 0.17	+ 1.17	- 39.09	+ 3.82
董氏週	1 150	27	31 050	2 510	- 58.53	—	—	—	—
簡週	88	351	30 888	2 497	+ 10.19	- 0.20	+ 131.03	+ 87.48	+ 2.53
合週	3 445	9	31 005	2 507	- 0.93	- 0.12	- 66.31	- 110.04	+ 13.29

第三表——以週期長短及各差疏密列週期位次之一（一週為準）

位次	短	長	日分差	入氣差	太陽入交差	太陰入交差	卑點年差	入轉差
第一位	簡	週	朱氏	陳氏	牛甲	牛甲	牛丙	沙羅士
第二位	漢	小	牛甲	漢大	合週	陳氏	漢大	牛乙
第三位	沙羅	甲	陳氏	牛丙	牛乙	合週	董氏	漢大週
第四位	牛	嘉	牛丙	董氏	陳氏	牛乙	沙羅士	合象
第五位	元	合	大週	董氏	元嘉	元嘉	沙乾	乾象
第六位	牛	乙	大衍	沙羅	沙羅	沙羅	陳氏	牛丙
第七位	朱	氏	牛乙	牛甲	漢小	漢小	牛甲	大衍
第八位	董	氏	董氏	牛嘉	大衍	大衍	元嘉	簡週
第九位	合	週	元嘉	漢小	牛丙	牛丙	漢小	漢週
第十位	大	衍	簡週	簡週	簡週	簡週	簡週	牛甲
第十一位	漢	大	沙羅	牛乙	朱氏	朱氏	牛乙	元嘉
第十二位	牛	丙	乾象	朱氏	乾象	乾象	朱氏	陳氏
第十三位	乾	象	漢小	合週	董氏	董氏	朱合	朱氏
第十四位	陳	氏	漢大	大衍	漢大	漢大	大衍	董氏

第四表——以各差疏密列週期位次之二（應用於2500年左右為例）

位次	入交差	日分差	入氣差	卑點年差	入轉差
第一位	陳氏	乾象	陳氏	大衍	牛甲
第二位	合週	合週	乾象	牛丙	簡週
第三位	牛甲	陳氏	牛丙	乾象	陳氏
第四位	牛乙	大衍	大衍	牛乙	元嘉
第五位	牛丙	簡週	合週	陳氏	乾象
第六位	大衍	牛甲	牛乙	牛甲	牛丙
第七位	簡週	牛乙	牛甲	簡週	牛乙
第八位	乾象	元嘉	簡週	元嘉	牛合
第九位	元嘉	牛丙	元嘉	合週	合週
第十位	漢大	—	—	—	—
第十一位	朱氏	—	—	—	—
第十二位	董氏	—	—	—	—
第十三位	漢小	—	—	—	—
第十四位	沙羅	—	—	—	—

求交食週期例題第一章

(用朔望月與半交周年相求)

0	朔實：	29,530588	5	1
1	半交周年：	173,310015		0
(0)		(147,652940)		(5)
(1)		(25,657075)		(5)
0		29,530588		1
1		25,657075	1	5
1		3,873513	6	6
1		25,657075		5
(6)		(23,241078)		(36)
(7)		(2,415997)		(41)
1		3,873513		6
7		2,415997	1	41
8		1,457516	1	47
7		2,415997		41
(8)		(1,457516)		(47)
(15)		(0,958481)		(88)
8		1,457516		47
15		0,958481	1	88
23		0,499035	1	135
15		0,958481		88
(23)		(0,499035)		(135)
(38)		(459446)		(223)
23		499035		135
38		459446	1	223
61		39589	11	358
38		459446		223
(671)		(435479)		(3938)
(709)		(23967)		(4161)
61		39589		358
709		23967	1	4161
770		15622	1	4519
709		23967		4161
(770)		(15622)		(4519)
(1479)		(8345)		(8680)
770		15622		4519
1479		8345	1	8680
2249		7277	1	13199
1479		8345		8680
(2249)		(7277)		(13199)
(22368)		(6408)		(131274)
2249		7277		13199
3728		1068	6	21879
24617		869	1	144473
3728		1068		21879
(24617)		(869)		(144473)
(113380)		(796)		(665408)
24617		869		144473
28345		199	4	166352
137997		73	2	809881
28345		199		166352
(275994)		(146)		(1619762)
(304339)		(53)		(1786114)
137997		73		809881
304339		53	1	1786114
442336		20	2	2595995
304339		53		1786114
(884672)		(40)		(5191990)
(1189011)		(13)		(6978104)
442336		20		2595995
1189011		13	1	6978104
1631347		7	1	9574099
1189011		13		6978104
(1631347)		(7)		(9574099)
(2820358)		(6)		(16552203)
1631347		7		9574099
2820358		6	1	16552203
4451705		1	6	26126302
2820358		6		16552203
(26710230)		(6)		(156757812)
4451705		1		26126302
29530588		0		173310015

求交食週期例題第二草

(用朔望月與半交周月相求)

0	半交周月：	13,606110	2	1
1	朔實：	29,530588		0
(0)		(27,212220)		(2)
(5)		(11,591840)		(10)
0		13,606110		1
1		2,318368	5	2
5		2,014270	1	11
1		2,318368		2
(5)		(2,014270)		(11)
(36)		(1,824588)		(78)
5		2,014270		11
6		0,304098	6	13
41		189682	1	89
6		304098		13
(41)		(189682)		(89)
(47)		(114416)		(102)
41		189682		89
47		114416	1	102
88		75266	1	191
47		114416		102
(88)		(75266)		(191)
(135)		(39150)		(293)
88		75266		191
135		39150	1	293
223		36116	1	484
135		39150		293
(223)		(36116)		(484)
(3 938)		(33374)		(8 547)
223		36116		484
358		3034	11	777
4 161		2742	1	9 031
358		3034		777
(4 161)		(2742)		(9 031)
(40 671)		(2628)		(88 272)
4 161		2742		9 031
4 519		292	9	9 808
44 832		114	2	97 303
4 519		292		9 808
(89 664)		(228)		(19 4606)
(94 183)		(64)		(204 414)
44 832		114		97 303
94 183		64	1	204 414
139 015		50	1	301 717
94 183		64		204 414
(139 015)		(50)		(301 717)
(699 594)		(42)		(1 518 393)
139 015		50		301 717
233 198		14	3	506 131
838 609		8	1	1 820 110
233 198		14		506 131
(838,609)		(8)		(1 820 110)
(1 071 807)		(6)		(2 326 241)
838 609		8		1 820 110
1 071 807		6	1	2 326 241
1 910 416		2	3	4 146 351
1 071 807		6		2 326 241
(5 731 248)		(6)		(12 439 053)
1 910 416		2		4 146 351
6 803 055		0		14 765 294

求交食週期例題第三章

(用崇天曆朔實分與交中分相求)

0 1 (0)	截交中分： 朔實分：	144 088,7 312.729,0 (288 177,4)	2	1 0 (2)
(5) 0 1		(122 758,0) 144 088,7 24 551,6	5	(10) 1 2
5 1 (5)		21 330,7 24 551,6 (21 330,7)	1	11 2 (11)
(36) 5 6		(19 325,4) 21 330,7 3 220,9	6	(78) 11 13
41 6 (41)		2 005,3 3 220,9 (2 005,3)	1	89 13 (89)
(47) 41 47		(1 215,6) 2 005,3 1 215,6	1	(102) 89 102
88 47 (88)		789,7 1 215,6 (789,7)	1	191 102 (191)
(135) 88 135		(425,9) 789,7 425,9	1	(293) 191 293
223 135 (223)		363,8 425,9 (363,8)	1	484 293 (484)
(1 790) 223 358		(310,5) 363,8 62,1	5	(3 885) 484 777
2 013 358 (2 013)		53,3 62,1 (53,3)	1	4 369 777 (4 369)
(14 226) 2 013 2 371		(52,8) 53,3 8,8	6	(30 876) 4 369 5 146
16 239 2 371 (276 063)		0,5 8,8 (8,5)	17	35 245 5 146 (599 165)
(278 434) 16 239 278 434		(0,3) 0,5 0,3	1	(604 311) 35 245 604 311
294 673 278 434 (294 673)		0,2 0,3 (0,2)	1	639 556 604 311 (639 556)
(1 146 214) 294 673 573 107		(0,2) 0,2 0,1	2	(2 487 734) 639 556 1 243 867
1 440 887 573 107 —		0,0 0,1 —		3 127 290 1 243 867 —

補 遺

前論寫定後數月偶檢後漢書律曆志，從其中篇辨論月食一段的報告中又得二種週期，茲補論於此。

(1) 馮恂週期：5640月

後漢章帝元和二年乙酉（西元85）始用「四分曆」，其月食週期則沿用「太初曆」之舊，即漢小週 135 月而改其元。其後數年實測漸顯錯誤。永元十二年（西元100）以後即加修改，行數十年。至靈帝熹平三、四年間，（西元174—175），劉洪、劉固、馮恂、宗誠，等多有修改之術。至光和二年（西元179）詔書命主管曆法機關太常考驗，以便決定去取。其報告中有云：「恂術（指馮恂）以五千六百四十月有九百六十一食爲法……誠術（指宗誠之孫宗誠）以百三十五月二十三食爲法」。所云百三十五月二十三食與漢小週無異，惟其起點不同。恂術則實爲另一新週期，他處所未見。五千六百四十月有九百六十一食，意即是說5640月一週內有 961 次太陽入交。「月」清刊本誤作「日」，但據曆理應爲「月」字無可疑。按5640月以四分曆法約之適得 456 年，合24章，又合 6 部。所以這個週期不但是日月食的週期而且也是朔閏的週期，其積日爲 166554.00，入氣差和日分差都應適盡。以積日 166554.00 爲實，以入交數 961 爲法，除之，商得 173.313215日，與現代半交周用數 173.310015日很是相近。

若以現代朔實乘之則其積日爲 166552.516320，又如前論用其他現代用數約之則得：

日分差	= -0.48	太陰入交差	= +0.123810
入氣差	= +2.073576	最卑年差	= -5.879994
太陽入交差	= +1.591905	入轉差	= +12.816120

就入交差言之，在前論第三表可列第十一位（即簡週之後），但仍遠在食限以內。入氣差除陳氏週外無與比倫，可列第二位，故次週月食之陰曆月份絕大多數與前週相同。最卑年差亦列第二位，故太陽黃經平實之差甚小。此週惟日分差及入轉差均近乎極大，日分差幾乎晝夜相反，好在太陰黃經平實之差亦大，因而反可得到補救。總之這也是一個很可注意的漢代週期。

倘要做前論第二表的比較，可用倍數 5 乘之得 2280 年（約）或 28200 月。那時最要の入交差爲 +7.96 日，並未超出食限，在第四表上當列第七位。餘不詳論。

（2）王漢週期：93 年或 1150 月

後漢律曆志同節又載「光和二（西元 179）公乘（官名）王漢上月食注自章和元年（西 87）到今年（西 179）凡九十三歲合百九十六食……」按自 87 年至 179 年兩頭計入確是 93 年。九十三年恰好與董先生近時所找得的週期相符，而且一百九十六正是第一表所列董週的半交周年數。實爲半交周年數而稱「食」，則與舊法之「百三十五月二十三食」及恂術之「五千六百四十月有九百六十一食」有同一意義。可見王漢之九十三歲合百九十六食正亦是表示一個月食週期。

漢人稱「交」爲「食」的解釋——我們在這段志文裏共見有三個週期，即誠術和舊法的百三十五月，恂術的五千六百四十月以及王漢的九十三歲。但三法都說「有幾食」或「合幾食」。這個「食」字我們須注意它都應作「入交」解，依曆法計算是無疑義的。然而太陽入交一次，有時有食，有時無食（距望前或後各十三日以上），有時雖食而不在地平上，更有時雖食而雲陰不見，所以真正見食的次數遠較「入交」數爲少。那末古人究竟怎麼能夠確定這個「入交」的數字呢？這個問題從四分曆法的原文內我想大略可以這樣解釋：原文說「月食數之生也，乃記月食之既者，率二十三食而復既，其月食（此食字當是衍文）百三十五」。可見其法是先記錄兩個月全食，再屈指計算中間可能有幾個月。再從志文的他處知道漢人已知二次連續の入交約爲五個月又二十三分之二十，所以連續二次的月食，如果可見，多數是相距六個月，少數是相距五個月，那末就可以把不見的月食補足了而得到所謂「食數」，實際就是「入交數」。舉例說：我們假定見到二次月食相隔 12 個月，我們在中間就應補入 1 食；倘有二次月食相隔 17 個月，就應補入 2 食。所以記錄的全食倘是前後距離凡 135 個月，中間補足了連兩端必定有 $23+1$ 個食，實際是 23 個「半交周年」。同樣倘記錄的全食距離爲 5640 月，則中間補足之後必定得 $961+1$ 個食。實際就是 961 個「半交周年」。這樣就成爲一種月食週期。依曆志求月食算術，漢人就是用這種週期排出月食的行列稱爲「月食注」，所以他們所注的月食只是可能的，而中間有許多次實際不能見食，似乎他們沒有分別的方法。

至於日食週期本來與月食週期相同，但實際見食有觀測地點條件的參加，計算複雜得多，漢人更沒有把握，所以只說月食，不說日食。

王漢的「月食注」如果就是他得到這個週期率的一個全週，那末第末個月食應該落在最初一個的第九十四年（中間應有93年足），而且兩端兩個應是中國可見的全食，而其日名干支相同。如果是第九十四年，則「光和二年」應是「光和三年」之誤，這是很可能的。其餘兩個條件我查史日長編（天文研究所專刊第一號）得：

章和元年（西 87）三月儒略日 1752945（戊戌）朔，十六日 1752960（癸丑望），

光和三年（西180）三月儒略日 1786906（己亥）朔，十五日 1786920（癸丑望）。

再查奧泊爾子（Oppolzer）日月食典得：

西元後	儒略日	食甚時分	入食分數	正對地面經緯度
87年	1752960	11時16分	11.9	西經172° 南緯15°
180年	1786920	8時27分	15.0	西經129° 南緯12°

由此可見章和元年與光和三年（不是二年）都有一個月全食同在陰曆三月望日，而且干支相同。但是奧氏時分以格林維基夜半為起點，我們假定以東漢都城（洛陽）做標準，則奧氏時分上應約加七點半，因此前後二食時間應改為下午 6 點46分及下午 3 點57分。第一次下午六點三刻左右，月食延亘在前後數十分鐘內很可以已升上地平而見到；第二次在近乎下午四時許，此時太陰當未上升而不能見。由此可見王漢的這個「月食注」當不是依據章和元年及光和三年的兩個月食而得來的，很可能是依據史官所記章和元年的一個與以往的另另一個得到他的週期率，再用這個週期率來排成他的章和元年到光和二年（二年可能不誤）的一百九十六個月食注。這樣解釋似乎尚近自然。

後漢書四分曆法今本充滿譌字，請刊本考證亦未提及，但用曆理尚可糾正，容於別篇再詳論之。

四十年四月廿一日平子補述於臺北