

先秦數學的發展及其影響

陳 良 佐

緒 言

數學是一門抽象的科學，但它的發生和發展，人類生活的實踐，却是它的泉源和動力。Smith 云，數學不是一堆靜止的知識，而是隨著人類的需要不斷的發展¹。換言之，數學是隨著人類文明的發展，不斷的改進和擴充。據此，世界古代的文明民族，或多或少，在某種的範圍和程度之內，產生了他們自己的數學。

人類在現實的物質世界裏，首先所體驗的是物體的形態，其次是數量。由於生活的需要和長期經驗的累積，「形」和「數」在人類的思想中便逐漸的有了清晰的概念和發展。

從新石器時代開始以後，人類的文明進入了一個新的階段。諸如：農業生產、曆法的制定、商業性的物物交換行為等等，必然擴大了人類對數的知識和運用；陶器、石器、弓箭等等工藝品的製造以及住宅的建築，都使人類由物體形狀的具體化而產生了抽象的概念。西安半坡是一個新石器時代農業文化的遺址，其房屋的基地是圓形、長方形或正方形；這是說明在史前時期，就有了幾何圖形的概念。

商代是我國信史的第一個朝代。優美的青銅器代表了商人高度文化的發展。殷人用六十甲子紀日；曆法是四分曆；甲骨文中的十進位紀數，是古代最進步的表數方法。因此可以推測，商代在幾何和算術方面，一定有不少的成就。

周代的文化是建立在殷人的基礎上，繼續向前發展。到了春秋戰國，在政治、社會和經濟各方面都發生了巨大的變化。新的生產工具——牛耕和鐵犁——促進了農業經濟的發展，進而刺激了手工業和商業，因而產生了多方面的影響。新的賦稅制度的建立，度量衡的制定，大的水利工程和軍事工程的修建，以及國際間的商業活動，貨幣的使用，大兵團的軍事行動等等，無一不是促成實用數學發展的有利條件。我國傳統的數學基礎，大部份是在這個時期奠定的。

本文爲中國上古史待定稿第四本之一章，審閱人：張秉權、劉世超、沈君山、許倬雲四位先生。寫作期間，楊希枚先生提供許多資料特致謝意。

戰國末期的墨家和名家，他們的邏輯思想和數學觀念，有助於當時的數學擺脫實用的範疇，建立起理論的數學。但非常可惜，秦漢統一之後，這兩個學派便迅速的滅亡了。因此理論數學在我國未能得到充分的發展，其中對幾何學的影響尤其大。

漢代的數學，以九章算術中的算術和代數而言，比同時代的其他民族都要進步。吾人確信，漢代的數學是承接先秦時代而來的。但是先秦是否有數學專著？却無法詳考。因此當討論這個時期的數學，常感文獻無徵。然而若從先秦的典籍與地下遺物，披沙淘金，利用其點點滴滴的資料，綴合彌補，並藉助漢人所編輯的數學和前人的研究，則大致可將古代數學的面貌，勾畫出一個模糊的輪廓。自然，誤解和附會，在所難免。

甲、表 數 法

一、數的起源與原始表數法

初民對數的觀念，非常模糊，可能有一個很長的時間，人類沒有數的語言。他們大概只有對具體物件多寡的感覺。在他們的思想中，數不能脫離物而單獨的存在。數的觀念，是從人類生活實踐中漸漸產生的；它是由計物而生。

數在人類歷史中的發展，非常緩慢。人類最初所用的數很有限。在澳洲和非洲一些原始部落，使用二進位的數，用一和二可以表示六個以內的對象；超過了六，他們統稱為「一堆」(heap)²。北美的 Crow 部落，直到現代，他們通常計算用的數不超過一千³。

人類擴大數的知識，是由於實際的需要，如計算財物，物物的交換，曆法的制定等等。這些事的發生必須是人類進入定居的農業聚落時期以後。書寫的數字符號和制度也是發生在這個時期⁴。

我國關於數的起源，世本云，「埭首作數」。宋衷注，「埭首，黃帝史也」。此說自然不可靠。不過古人主張在黃帝時代有了數，仍然有其可信的成分。照傳說中的黃帝，正是新石器時代的人物，當時發展了農業，並且可能已脫離了原始聚落的社會生活，進入了部落或部落聯盟的組織。

數在人類中發展的歷史，可能經過了幾個不同的過程：數的概念——語言數——

符號數——文字數。

人類最初並無數的抽象觀念，他們計算的時候，必需藉助實物，如手指、石子、豆粒、果核、草莖、樹枝等等，隨手可得之物⁵。當時計算的方法，是用一個手指，或一個石子對應要統計的某一些目的物，即所謂「一一對應」。

人類所用的記數制度，以5、10、或20進位最常見⁶。這三種進位，均是由初民用手和腳表數而來。5，是用一雙手的手指作集合單位(Collective Unit)或底(base)；10，雙手；20，雙手和兩腳⁷；例如，一些原始語言，5的意思是一隻手(Once my hand, or simply hand)；10，雙手(both hands)；20，我的雙手，我的雙腳(My hands, My feet)⁸。

五進位者，見於北美的印地安人和愛斯基摩人⁹。就是歐洲的某些方言，仍然殘留著以5為底的表數遺跡，例如 Yorkshire、Comberland、Westmorland 和 Lincolnshire 等地¹⁰。

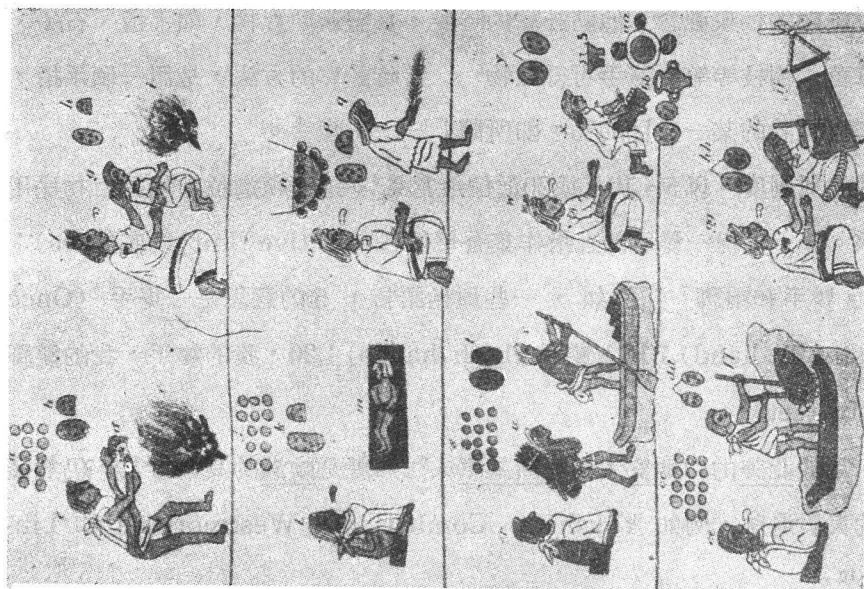
20進位，見於 Yucatan 的馬雅人(Maya)。法語，從60到100，很明顯的表示古代曾經使用20進位的計數法¹¹。

初民用豆粒、果核、石子或結繩作記數的工具，按其形狀可歸為一類——圓形的小物體。例如，有些非洲黑人用石子或堅果作計算的工具；其法，滿5，就放在一邊成一堆¹²。據 Herodotus 的記載，「埃及人用卵石計算，由右往左；而希臘人則由左往右¹³。」

蘇美爾人(Sumerian)的神廟中有一塊作賬單的泥磚(C. 3500 B. C.)，其中的牛、麥、魚的數量，便是以圓形表之(圖一)¹⁴。又阿根廷的 Mendoza 收藏了一件印地安的圖畫文字。它是敘述如何教育兒童。兒童的年齡，便是用圓圈表之；例如14歲，便畫十四個圓圈(圖二)¹⁵。上述兩例，表數的圓圈，可能表示當時以石子或果核計數。

我國典籍中記載以圓圈表數者，尚未發現。不過朝鮮曾用石子或銅錢作計算的工具¹⁶。我國山東某些地區的農民，也用銅錢來計算¹⁷。此種現象，不知是否由古代用石子或豆粒等表數的遺跡。

用樹枝表數，據 Cajori 的記載：「南海島民(South Sea Islanders)」用椰子



圖二 印地安的兒童教育圖

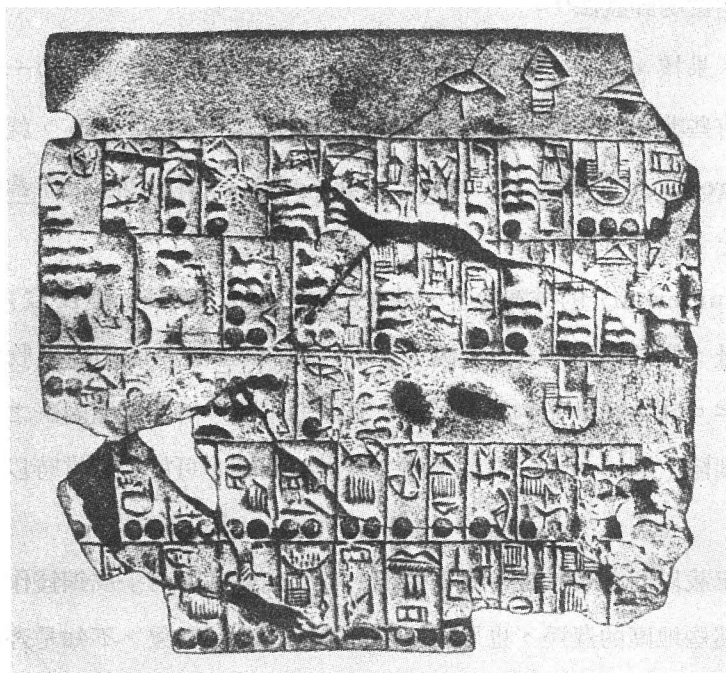


圖 蘇美爾神廟的一塊泥磚賬單

 II	 I	 IIIIII	 III	 IIIIII	 IIII
 III	 III	 IIII	 IIIIII	 III	 IIII
 III	 II	 I	 IIII	 IIII	 III
 I	 I	 IIII	 IIII	 II	 II
 IIII	 IIIIII	 IIII	 I	 III	 IIII
 III	 I	 II	 IIIIII	 IIII	

Census roll of Indian band at Mille Lac, Minnesota.

圖三 Mille Lac 地區的印地安部落戶口冊

帶柄 (Coconut stalk) 計算，每當算到十的時候，放置一根小帶柄於一旁；滿100，則放置一個大的¹⁸。

Yucatan 的 Maya 人，有一些數是 20 進位，以 “.” 表 1；“—” 表 5。據 Smith 云，Maya 人書寫的數字，是以石子 (Pebble) 和木棒 (rod) 為基本成分 (basic elements)；並認為使用木棒可能與亞洲有關。而亞洲使用木棒計算，以蘇美爾人為最早¹⁹。美國的印地安人，直到十九世紀仍然有縱畫表數者 (圖三)²⁰。此種表數可能與木棒 (或手指) 有關。

結繩紀數，據西方的記載，有琉球、祕魯和玻利維亞的印地安人²¹。在印加 (Inca) 帝國境內，除了結繩以外，沒有其他記數方法。祕魯人的結繩有多種方式，其個位數是以聯「結」的個數定之，例如三個結相聯，即代表 3；有時可作多位數的加法 (圖四)²²。

我國境內一些少數民族，現在仍然用結繩紀數。例如雲南紅河元陽哈尼族人，買賣土地時，用「單股麻線打結，標誌田價銀子，每結代表一兩銀子，結與結之間距離相等，即是單位相同。如最後距離只有一半，即代表半兩」 (圖五)²³。

我國古代，必然也用過結繩記數。老子第八十章：

使民復結繩而用之。

又易繫辭下傳：

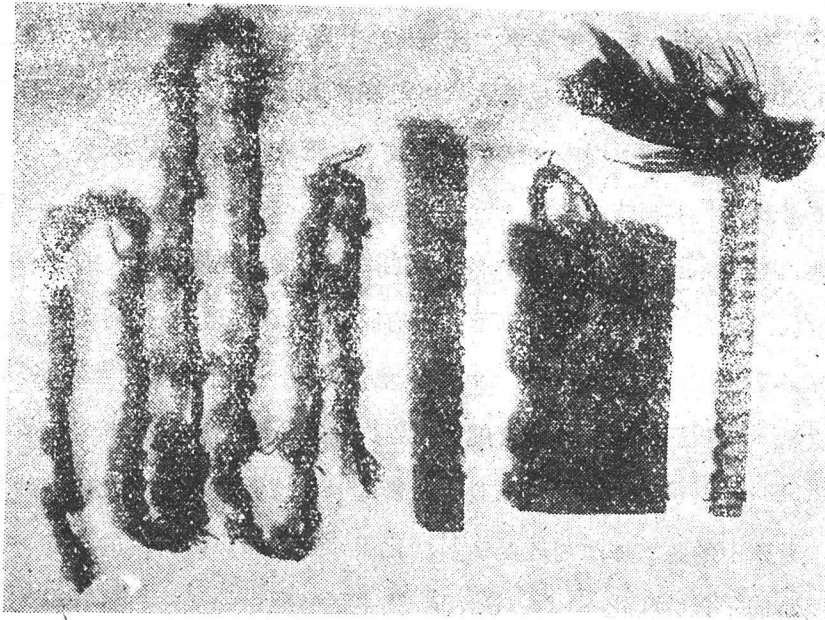
上古結繩而治，後世聖人易以書契²⁴。

木上刻痕表數，有的民族持續的時間相當的長。古埃及用木刻 (tally stick) 記數。在歐洲更為普遍，英國直到十九世紀才完全放棄²⁵。我國雲南的拉祜族，民國四十六年 (1957) 以前，記家禽、家畜的賬目，仍延用木刻。今舉雞賬一種為例：

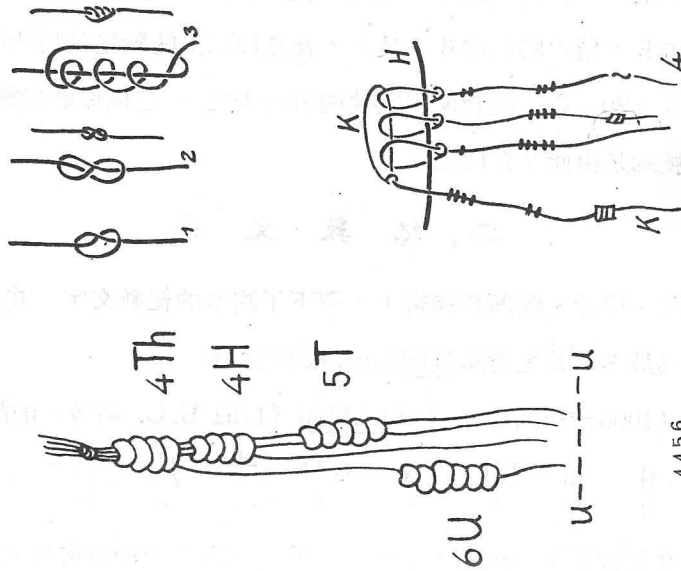
木刻正面和側面，都刻著缺口。側面一個缺口，代表千隻雞；正面一個缺口，代表十隻雞。木刻側面有四個口，正面有二十個口，即四千二百隻雞，在木刻一端剖開一縫，夾雞毛一節，以別夾豬毛或馬尾的豬、馬賬²⁶。

雲南省博物館內保存了許多木刻和結繩，多數是記銀錢或家畜數的賬目²⁷。

木刻記數，我國古代的典籍也有記載，如墨子公孟第四十八：「是數人之齒，而以為富。」愈樾注云：



圖五 雲南少數民族用的木刻和結繩



圖四 印地安人的結繩和加法

齒者，契之齒也。古者刻竹木以記數，刻者如齒，故謂之齒²⁸。

又列子說符云：

宋人有遊於道，得人遺契者，歸藏之，密數其齒曰：『吾富可待矣』²⁹。

以上數種初民表數的方法，我國古代可能都曾用過。不過歷史發展的結果，照後世籌算發展的情形來推測，用木棒或草莖表數，大概是最流行的方法。

揚雄方言云：「木細枝謂之杪，……燕之北鄙、朝鮮、洌水之間，謂之策」³⁰。策就是表數用的籌。這是說，當時中國邊境地區，仍用樹枝作為計算的籌。

我國古代占卦用的筮，可能與草莖表數有關。左傳禧公（十五年）：「筮，數也。」尚書洪範疏云：「龜曰卜，蓍曰筮。」說文：「蓍，蒿屬，生千歲三百莖，易以為數。」這裏所謂之數，雖然不能視為數學上的數，但與古代以草莖表數一事，却甚有關係。漢書律曆志第一（上）：「伏羲畫八卦，由數起。」這個數，應當就是指計算的數而言。因此，易經中的卦，原來可能是由數演化出來的。所以占卦用的蓍草，大約是最初用草莖表數而予以神祕化。西人 Barde 竟主張易經中的神祕占卦符號，是遠古算術的退化³¹。這個觀點值得重視。

綜合上述，可知初民表數必需藉助於實物。表數的基本方法，是一對一，無論是用手指、樹枝、木刻、石子、結繩，或是其他的東西，皆是同一原則，即「積累」法，積五畫代表5，積六結而為6。最初，就是10以上的數也是用此法。及至創立了進法，10（或5或20）以上的數使用其他的方法表之。這種原始表數方法，雖然笨拙，但數字符號却是由此孕育而生。

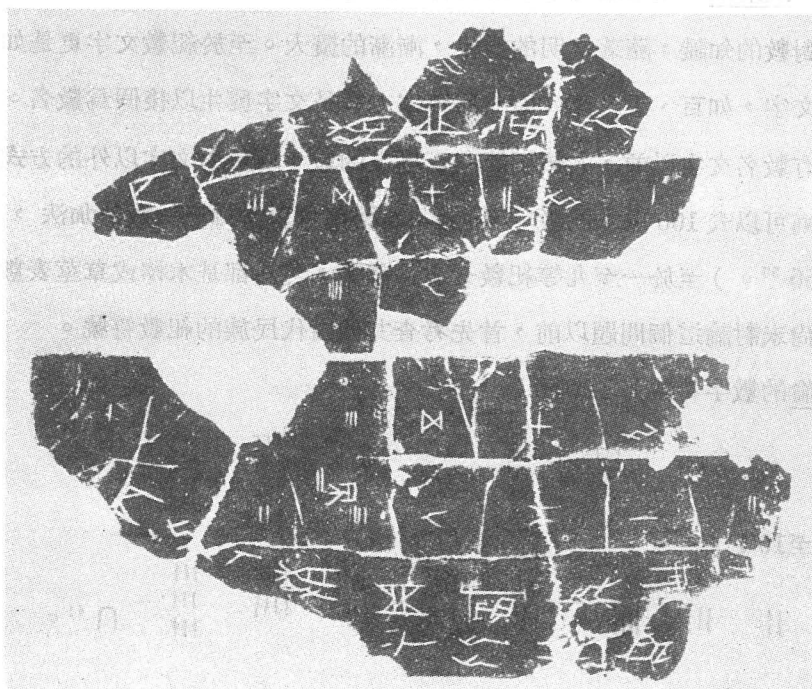
二、紀數文字

古代的陶器、甲骨、銅器和錢幣上，留下了許多的紀數文字。其中以殷商的甲骨和戰國的錢幣為最多。首先討論戰國以前的紀數文字。

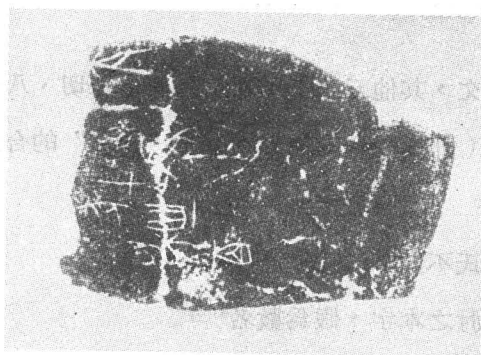
西安半坡（4000~3500 B. C.）和二里頭（1751 B. C. 稍後）的陶文紀號有：

1	11	111	1111	X	Λ	十	八	十 ³²
1	2	3	4	5	6	7	8	9

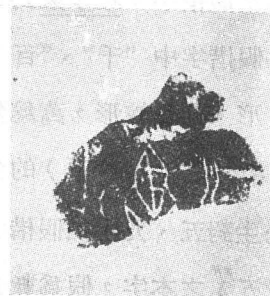
殷墟甲骨文紀數是用一至九，十、百、千、萬以及一些合文來表示。這些文字的寫法（合文見後）如下，（並見圖六、七、八、九）：



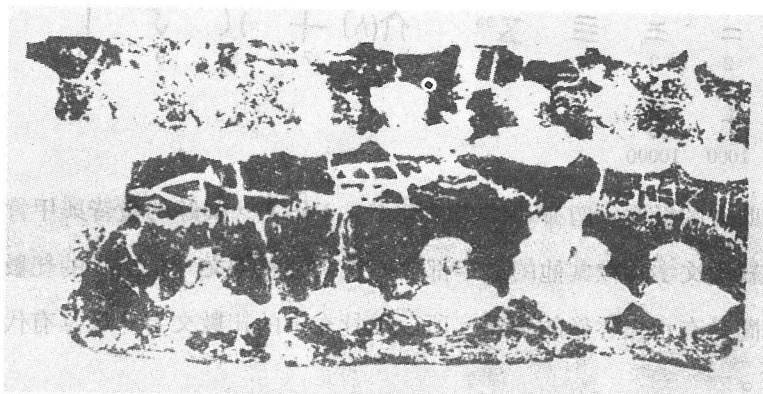
圖六 甲骨文紀數：1-10（丙、中二，圖版 397）



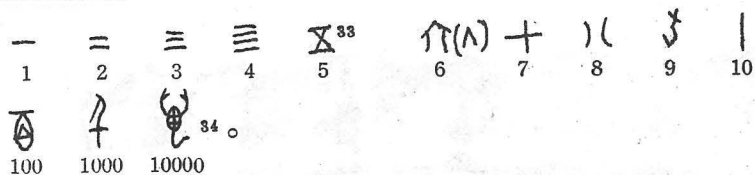
圖七 甲骨文，四十一、百（佚 四三）



圖九 甲骨文，萬（後下，一九、八）



圖八 甲骨文，千（丙 中一，圖版 185）



周代的鐘鼎文的數字，四有時作 $\ominus$ 或 𠄎 ³⁵，+作 十 ，其餘的數皆與甲骨文同。

卜辭中的紀數文字比較其他的文字都要完整；它和陶文、金文中的紀數文字可以清楚的看出其間是有承先啓後的關係。所以甲骨文中的紀數文字，最具有代表性，應當詳細申論之。

甲骨文字，一至四，多數學者認為是指事字；而五、六、七、八、九、百、千、萬等數名是假借字。陳夢家云：

假借字中“千”、“百”是合文，其他五是午、六是入、七是切、八是分的初形，九是蛇形，萬爲蠱、 𪚩 （即蠍子）的象形。百是“一白”的合文，千是“一人”（讀若干）的合文³⁶。

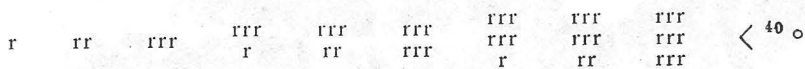
李孝定先生對五、九兩個假借字與陳氏不同：

五 𠄎 之本字，假爲數名，九肘之本字，假爲數名³⁷。

一至十等數，張秉權先生則認為是手指或臂表數的象形字³⁸。

按人類對數的知識，隨著文明的進步，漸漸的擴大。至於紀數文字更是如此。我國表大數的文字，如百、千、萬、億、兆等字，當是文字發生以後假爲數名。（這並不是說，未有數名文字以前，人類不能有百以上的數。只是用文字以外的方式表之而已。例如木刻可以表100以上的數；印地安人結繩可以進行三位數的加法，有的結繩，則表4456³⁹。）至於一至九等紀數文字，竊疑，可能都是木棒或草莖表數的象形字。當吾人尙未討論這個問題以前，首先考查其他古代民族的紀數符號。

古巴比倫的數字符號，1至10：



古埃及，1至10：



公元前第五世紀 Cormth 一塊石碑殘文中，8 爲 ||||| ；Cyprns，6 爲 |||| ；Crete， I (1)， |||| (4)， — (10)， ||||— (14)⁴²。古印度最早的紀數符號是 King Asoka 時代所留下來的。當時有多種符號，而 Karosthi 符號，也是直立的縱畫：

$\text{I} \quad \text{II} \quad \text{[III]} \quad \text{||||} \quad \text{|||||}$ ⁴³

Maya 人，1 至 19⁴⁴：

$\cdot \quad \cdot\cdot \quad \cdot\cdot\cdot \quad \cdot\cdot\cdot\cdot \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—}$
 $\text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—}$ ⁴⁴

這些紀數符號，無論是由手指表數或由木棒、木刻、石子而來，都是「積累」而成。就是十以上的數，埃及和巴比倫也是用符號重複的原則 (repetition of symbol)，例如：59，埃及爲 $\text{nnnn} \text{||||}$ ；巴比倫， <<< rrr rrr rrr ⁴⁵。

綜合前述，可知初民最早的表數符號，是根據原始表數的重複原則，「積畫」或「積圈」。經過一段時期之後，始予簡化。例如前述埃及象形文字，2 至 9 是積畫。可是以後一種僧侶用的草書體，放棄了麻煩的符號重複方式，而代之以簡單的符號。例如，以橫線「—」代替 |||| (4)； ? ，代替 ||||| (7)； $\text{nn} \text{||||}$ (28) 爲 =A ⁴⁶。

由此而論，如果西安半坡陶器上確是數字，則必然是經過了簡化以後的符號。（那時能有如此進步的紀數法，筆者甚表懷疑。）前曾論及，我國古代用樹枝、草莖表數最爲流行。最初也是用「積累」法。以後，從五以下的數，便加以簡化了。簡化後，僅只當書寫時有的變成了曲劃，但實際計算時仍用直的木條或草莖。所以那些紀數符號一定可用直線條表之。

陶文和甲骨文中，一至五，七，十均是直劃，顯然可用木枝表之。六、八、九三字是曲劃，仍可改成直線條，象木枝表數，如：介，爲六；八爲八或 $\times$ ；九爲 ? 。因此作者認爲甲骨文一至九數是用木枝或草莖表數的象形字。

百、千、萬等數名，當是假借字；當未借用這些字以前，是如何表示，則無法詳考。

我國古代，萬以上的紀數文字還有億、兆、經、姦等，如：

一人有慶，兆民賴之⁴⁷。

萬億及秭⁴⁸。

紂有億兆夷人，亦有離德⁴⁹。

合十數以訓百體，書千品，具萬方，計億事，材兆物，收經入，行姦極⁵⁰。

億、兆等大數，孫子算經上有上、中、下三種進位方法⁵¹。但先秦及漢時，均為十進。漢應邵風俗通義云：

十十謂之百；十百謂之千；十千謂之萬；十萬謂之億；十億謂之兆；十兆謂之經；十經謂之垓；十垓謂之補；十補謂之選；十選謂之載；十載謂之極⁵²。

又禮記王制云：

方里者，為田九百畝，方十里者，為方一里者百，為田九萬畝。方百里者，為方十里者百，為田九十億畝。方千里者，為方百里者百，為田九千（原文萬，誤，今改）億畝⁵³。

由王制所載，一億為十萬。王制成於漢初。史記封禪書云：「漢文帝使博士諸生刺六經作王制。」漢初的學者，以十萬為億，必是承自秦和先秦。億以上諸數，照風俗通義所言，也是十進。

由以上所論，可知我國紀數文字皆是十進，並且有了表 10^8 的數。

三、甲骨文和貨幣紀數文字及位值 (Place-Value) 觀念

甲骨文和金文資料中，有許多紀數文字。在這些文字中可以發現紀數文字的位值觀念。今將十以上的紀數文字，擇其要者，列於下表。

數	甲 骨 文	備 考	鐘 鼎 文	備 考
11	𠄎	甲、37	𠄎	小臣𠄎
12	𠄎	甲、131	𠄎	走𠄎
13	𠄎	乙、下、6299	𠄎	小臣靜彝
14	𠄎 (𠄎 前、八、十一、三)	續存上、1492 ⁵⁴	𠄎	段𠄎
15	𠄎 (𠄎 粹、586)	前、三、二三、六	𠄎	大鼎
16	𠄎	丙、中(一)、305	𠄎	克鐘
17	𠄎	佚、九九〇		
18	𠄎		𠄎	克盃
19	𠄎		𠄎	賁卣
20	𠄎 (𠄎 丙、下(一) 399)	丙、下(一)、503	𠄎	頤鼎
25	𠄎	考、中、二	𠄎	

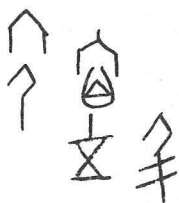
28			𠂔𠂔(	賓盤
30	𠂔 (山丙、下(一)、399)	前、一、三五、五	𠂔	𠂔鼎
31			𠂔𠂔-	鬲攸从鼎
40	𠂔 (𠂔丙、中(一)、267)			
41	𠂔	佚、四三		
48	𠂔	考、中、二		
50	𠂔	丙、上(二)、143	𠂔	𠂔
68	𠂔	甲、3113		
70	𠂔 (𠂔丙、中(二)、346)	甲、2278		
100	𠂔 (𠂔前、六、四二、八)	甲、1133	𠂔	令饒
114	𠂔	後下、一、四		
130	𠂔	續存上、14		
159	𠂔	丙、中(一)、267		
162	𠂔	後下一、四		
180	𠂔	續存下、91b		
209	𠂔	前、四、四二		
250	𠂔	丙、上(二)、181		
269	𠂔	續、三、四十一、一		
299	𠂔		𠂔𠂔𠂔𠂔	𠂔
300	𠂔	前、三、三十一、二		
348	𠂔	後下、四一、一二		
400	𠂔	明、1517		
451	𠂔	丙、上(一)、80		
500	𠂔	丙、中(二)、373	𠂔	號季子白盤
510	𠂔	續存下、五七		
659	𠂔		𠂔𠂔𠂔𠂔	大孟鼎
800	𠂔 (佚、五一二)	粹、1079		
900	𠂔	庫、一五六		

1000	𠄎	粹、1586		
1050			𠄎 𠄎 𠄎	大孟鼎
2656	𠄎 𠄎 𠄎	後下、四三、九		
3000	𠄎 (𠄎 前、七、二五、二)	粹、1299	𠄎	齊侯鐘
4000				
5000	𠄎	前、七十五、四		
6000	𠄎	佚、四三八		
8000	𠄎	粹、119		
10000	𠄎	後下、一九、八	𠄎	庚嬴卣
13810			𠄎 𠄎 𠄎 一	小孟鼎
30000	𠄎	粹、1177		

金文的紀數文字和甲骨文中的2656，原爲下行而左。金文資料，見於兩周金文辭大系，只有齊侯鐘見於容庚的金文編。

甲骨文中表示「數詞」者有多種形式。根據陳夢家先生的研究，最常見者可歸納爲三種形式⁵⁵：

- (一)整數一名詞一連詞一零數，如：十羌又五⁵⁶。
- (二)整數一名詞一連詞一零數一名詞，如：十犬又五犬⁵⁷。
- (三)名詞一整數一零數，或整數一零數一名詞。如：二千六百五十六人(圖十)⁵⁸。



圖十 甲骨文，2656人(後下、四三、九)

最後的一種表數形式，與近代表數法並無任何的不同。今討論其在數學方面的意義。

甲骨文所見的最大數是三萬。照甲骨文紀數的方法，殷人能够表十萬甚至百萬以內的任何自然數。至於殷人所用的基本數字，則只有十三個：

一	二	三	三	五	六	七	八	九	十	百	千	萬
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1000	10000

再加上一些合文如：

二十	三十	四十	五十	六十	七十	八十	九十
二百	三百	四百	五百	六百	七百	八百	九百
二千	三千	四千	五千	六千	七千	八千	九千
二十萬	三十萬	(.....)					九萬
20000	30000						90000

甲骨文中的合文，事實上，是由二個基本數字拼合而成。例如 五十 是由 五 (5) 和 十 (10) 合成 50。二十、三十、四十 是積豎畫 一 的變形符號來表 20、30、40。其他以百、千、萬的合文，皆是如此。所以甲骨文表數的合文，不應視為獨立的紀數文字。

至於甲骨文和金文中的十、百、千、萬等字，以數學的觀點而言，實際是位值 (Place-Value)⁵⁹ 符號。例如 二千六百五十九 (2656)、二百九十六 (299) 中的千、百、十是二、六、五、九的值，表六百的「六」，九十的「九」與六個的「六」，九個的「九」都是同一個符號。至於二、六、五、九的值，則必需用千、百、十等符號定之。如能用其他的方法，如位置或次序來定，則此等符號即可略去。戰國時代的貨幣紀數即是如此。

又甲骨文中表十的符號「丨」是「一」直立之形，20、30、40等合文，是二、三、三直立的變形。換言之，10以及20、30、40的合文，基本上與表個位數的一、二、三、三 是同一個數字。

由以上所論，甲骨文表數的基本原則，是用九個文字 (1—9) 再加上一些表位值的文字，雖然正式完成九數表數的方法，要到春秋戰國籌算確立以後，但其基本原則却是奠定於商代。

春秋戰國的貨幣，其中有許多記有數字符號。此等數字原來是「作範之次第」⁶⁰。

由此等紀數文字可以瞭解當時民間表數的方法。下文所論貨幣紀數文字的問題，目前尚不能成為定論。因為作者引用的資料大多是清人的著述。其所繪製的古錢圖形，可能與原物有異。即使完全正確，其真偽的問題，尤難判定。近代出土了大量的戰國明刀，其紀數從一到五千應有盡有⁶¹，如將這些紀數文字加以徹底的研究，這一問題必可獲得最後的結論。不過就近年發表的有限資料而言，其中所見的紀數符號與清人所述者，並無差別，因此清人的著述其可信的程度甚大。

先秦貨幣上的紀數文字，從一至四，通常為 一 = 三 三，如武安的尖足布即是如此⁶²。四有時作 𠄎，或此字的變形⁶³。一至五有時作 丨 || ||| ||||，如畿氏的尖足布⁶⁴，此等符號不是20或40等數。因為在同類的錢幣，20、40作 𠄎、𠄎⁶⁵。

五，通常作 𠄎，變形體為 X 或 𠄎⁶⁶，有時作 三⁶⁷。

六，通常作 介 或 介、八，如晉陽、平周的尖足布⁶⁸。

七，在貨幣中多數作 𠄎，如畿氏的尖足布⁶⁹；明刀作 𠄎⁷⁰。七，有時寫成 𠄎⁷¹，或 𠄎，或 𠄎⁷²。

八，各國皆相同，作)(或 八，如武安的尖足布和明刀⁷³。

九，武平的尖足布和明刀作 𠄎⁷⁴。泉布中，九常作 𠄎 或 𠄎，如武安和郭的尖足布⁷⁵。𠄎 或 𠄎 大約是九的變體字⁷⁶。

貨幣紀數，有如後世算籌符號者，如 一 一 (π) 三 三⁷⁷。這四個符號，前輩的學者皆釋為六至九這四個數，不過照甲骨文，這四個符號也可能表11至14等數。

十，在錢幣中至少有三種：十、丨，𠄎。隶(梁)布⁷⁸中，有一個紀數為 𠄎，另一個同類的布為 𠄎⁷⁹，可見十與丨乃表同一個數——10。左字明刀的紀數中，有作十，也有 𠄎、丨 與殷和西周表十的字相同⁸⁰。貨布中的十(10)字，可能是戰國的新字。

就以上所述，貨布上所見的一至十紀數文字有多種。歸納言之，最常見者，大致如下：

一	二	三	三 𠄎	𠄎 三	介 八 丨	𠄎 𠄎	)(𠄎 三	𠄎 𠄎 𠄎	十 𠄎
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

貨布上所見的多位數，以二位數為最多，最大數是二千。今選明刀、畿氏等數種錢布，而紀數又明晰可辨者列之如下：

11	12	14	15	20	30	51			
15	17	18	23	24	25	62	27	31	32
38	62								
15	20	22	26	28	29	31	32	33	39
45	48	49	50	52	53				
35	44	58	68						
281	515	657	154						
281	515	657	154	1000	2000				

泉布上還有二個符號，即「○」與「·」，這兩個符號就目前的資料而言，雖然有時具有零的作用，但其主要的目的是用來表十。左字明刀有一紀數為, 李佐賢釋為50（圖十三）⁸⁹，明刀中還有一些紀數，如：

90 °

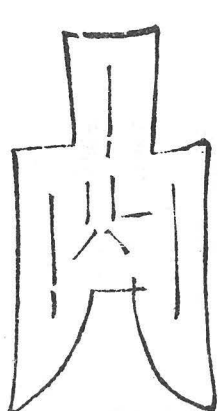
李氏釋▽爲口字；竊謂，此符號卽上述之「○」。在尖首類的刀幣中，又有幾個符號，如)、(、)、(、)C⁹¹，「·」可能亦與以上所述同；按文字的書法筆鋒，前二者是80、18；第三個是80或18，還不能確定。

由以上所見，古錢幣上的紀數符號，相當的紛歧，紛歧的原因，除了時間與空間的因素外，其最主要者，是鑄工只求簡易，潦草從事，不一定按著正規的書法，也不盡為合理，有時隨意為之。不過，也正說明，這是一個創新的時代。

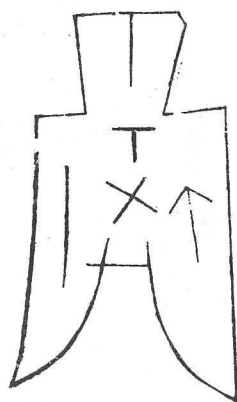
在貨幣紀數中，有一點特別值得注意的，就是表位值符號的十和百，絕大多數予以省略⁹²，此種記數，大約是仿照籌算表數的方法。這是貨幣紀數比之甲骨文、鐘鼎文進步的地方。

大體而言，戰國時代的貨布紀數，除了用零（○或·）的情形還不甚清楚，其他的一切，都接近現代的九數表數法。

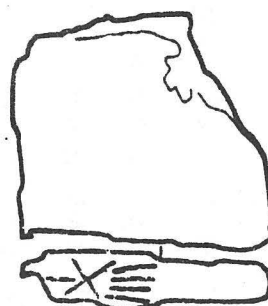
戰國貨幣紀數：



圖十一 281

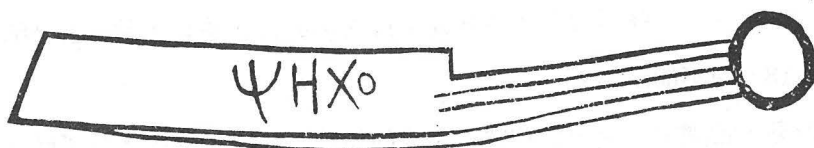


圖十二 647



阜64号

圖十三 154



圖十四 千·50

四、算籌表數法

(一) 算具——籌與算板

據 Smith 云，古代的數字不適用於計算；在近代演算的制度未完成之先，藉助於算具在世界各地是具有普遍性的⁹³，古埃及曾用石子計算；古羅馬也用過石子，以後用象牙、彩色玻璃珠等⁹⁴。計算 (Calculus) 這個字，原來就是石子 (Pebble)⁹⁵ 的意思。古代的埃及、巴比倫、希臘和羅馬，都用形式不同的算盤 (Abacus)⁹⁶。同樣的情形，我國甲骨文和鐘鼎文的紀數，也不完全是運算時的表數符號，乃是書寫時所用的文字。

我國古代可能也用過石子、果核等類的實物幫助計算，不過用草莖、木條大約是最為普遍；由此而演變成後世所謂之籌算。由前述甲骨文的紀數（一至十）以及二十、三十、四十等數的合文來看，商代大概有了籌算。文獻的記載首先見於老子第二十七章：

善數不用籌策。

籌的其他名稱有：策、算、籌算、算籌、算子等⁹⁷。籌最初是用竹製。說文：

：長六寸，計曆數者，從竹，從弄，言常弄而不誤也。

又漢書律曆志(上)云：

其算法用竹，徑一分，長六寸。

按一漢尺約 0.230 公尺⁹⁸。六寸合 13.8 厘米。考古學家在一座戰國的古墓中，發現了四十根竹籤，每根長 14 厘米。有的學者主張是計算用的籌⁹⁹。

算板是運算時置籌的平板，日本用的算板刻有方格如圍棋盤，布算時，籌置入方格內(圖十五、十六)¹⁰⁰，方格甚為重要，用以定位。並用空格表零。明程大位（1593 年）算法統宗，師生問難圖，其中的算板¹⁰¹ 是否為布籌用的算板，目前尚難確定。

古代的文獻，未有算板的記載。梅文鼎云，古人將籌「縱橫列於幾案」¹⁰²，不過照算的字形，古代可能有算板。說文竹部有二個算字，一個為；另一個：

：數也。从竹从具，讀若筭。

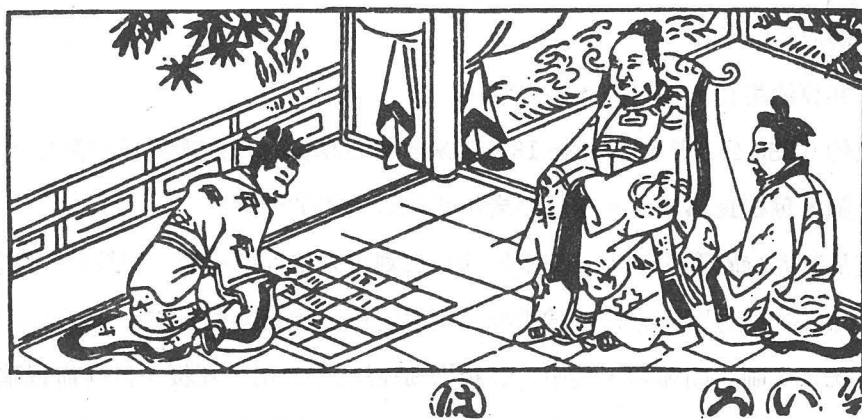
這兩個算字不是重文，應當有別。段玉裁注云：

千	百	十	一	分	厘	毫	絲	忽	微	商
三	三	三	一	上	三	上	上	上	上	商
一	上	三								實
一	上	上	上							方
			上	上						廣
			上	上						隅
			上	上						三
			上	上						四

先ノ商一
 相呼テニ
 レハ六トナ
 テ商ニ同
 トナル内
 同加スレハ
 ナル商ト
 同加スレハ
 トナル商
 實ヲ累テ
 千四百今
 厘六毛六
 次ノ圖ノ如

From Nishiwaki Richyū's Sampō Tengen Roku, 1714.

圖十五 日本算板



From Miyake Kenryū's Shojutsu Sangaku Zuyō, c. 1716.

圖十六 日本算板

筭爲算()之器，算爲筭之用。二字音同而義別。

段氏之意：筭爲運算用的工具，是名詞；算是用算具來進行運算，是動詞。段氏所論甚是。用籌()擺成數碼，即「數也」。許氏解釋「筭」字的時候，說它是六寸長的竹籤。但後面加了一句「常弄而不誤也」，又使二字的界說混淆不清。按：弄，動詞。說文扌部：「弄，玩也，從扌，持玉。」竊謂，筭字最好的解釋：从竹、手、玉。「玉」不釋成「玉」，而釋成刻格子的板。換言之，筭是指籌和算板。當算板劃有格子時，才「能常弄而不誤也」。因爲春秋戰國時用九個籌算符號和零（空位）表自然數（詳後），並用之進行運算，如無縱橫線製成的格子來定位、表零並間隔數碼，則易生錯誤。所以「玉」釋爲算板比釋爲「玉」更爲合理。（玉指石作的算板亦非不可能。例如在 Salmis 發現古希臘的算板，就是一塊刻有平行線的大理石板¹⁰³。）第二個算字爲動詞，故當从目，从手¹⁰⁴。

至於方格座標，我國古代並不陌生，例如古代的井田。西周「大克鼎」的文字就是刻在整齊的方格內¹⁰⁵。

據 Smith 的研究，西方古代的算盤刻有縱線或橫線，有的刻凹槽；如第一行代表個位，次一行是十位，第三行即百位，如此類推¹⁰⁶。

綜合以上所述，從籌算運算時的實際需要，以及說文算的字形等等的情形來看，竊疑我國古代較複雜的運算，算板上可能劃有格子，或者在運算之時，先定位。至於一般的運算，只在一平面上布籌而已，或在平地，或在几案上，後世相鄰的二個算籌符號（1~5）必須縱橫相間，原因就是避免發生混亂。（關於算板及其縱橫線的問題，詳見拙文，我國古代籌算的空位——零——及其相關的問題¹⁰⁷。）

（二）籌算符號——九數和零

我國從商代便奠定了九數表數的基本原則。到了春秋戰國的時代，十進位的籌算表數，僅有九個符號。周禮把小學的數學課程，稱爲九數，正是說明此意。又黃帝內經素問三部九候論：

天地之至數，始於一，終於九焉¹⁰⁸。

也透露出我國用九個數字符號表數這個事實。

先秦所用之九個籌算符號，典籍中無明確的記載；不過根據少數文獻以及貨幣紀

數，大致可以推測出來。

左傳有一則，說明算籌符號與位值的觀念，襄公三十年 (542 B.C.):

「亥有二首六身，下二如身，是其日數也。」士文伯曰：「然則二萬六千六百有六旬也。」

左傳注云：

亥字，二畫在上，併三(個)六爲身，如算之六，下亥上二畫，豎置身旁¹⁰⁹。

按金文中，以二爲首的亥字有許多，大致都可拆成三個+ (籌算的六)。金文有一亥字爲𠄎¹¹⁰，照左傳注，把亥字拆成 || ⊥ ⊥ ⊥ []，即 26660¹¹¹。在這裏有一點值得注意，即是勿需表十、百等紀數文字。

根據墨經的敘述，可以看出幾個籌算符號，以及籌算的數與「位」的關係：

經下：一少於二，而多於五，說在建位¹¹²。

經說下：一：五有一焉；一有五焉；十，二焉。

此段經文，如用十進位的籌算來解釋，則十分清楚。它的意思是：

經：個位的一 (1) 少於個位的 = (2)，如將表個位「一」的籌建在十位上，它所表示的數是10，則大於五。

說：個位的 ≡ (5) 有一；如將表個位的一建在十位上，則成爲 10，10 中有 5，並且是二個 5¹¹³。

根據王莽時代的泉布，以及居延漢簡少數的紀數文字，漢代的九個籌算符號，是：

— = ≡ ≡ X T π π π ¹¹⁴。

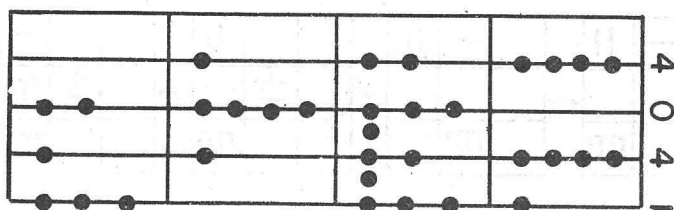
至於先秦時代，大概未能達到如此整齊的地步。如照左傳、墨經以及刀布上的紀數文字而言，春秋戰國各地用來表數的九個算籌符號，大致不出以下所列：

— (I)	= (II)	≡ (III)	≡ (III)	X (IIII)	≡ X	介 ^ ⊥	× 卜 ⊥
1	2	3	4	5		6	7
× ≡ 8 ㄣ ㄣ ⊥ 9 或 — 10							

先秦用來表數的籌算符號，雖然各地有異，但不論用何種符號，就貨幣紀數以及左傳所載，顯示當時用籌表任一自然數，在原則上，僅有九個符號。

十進位的表數法，以九數表數為最科學，此即近代所用者。此種方法必須具備三個條件：九個簡便的數字符號，建立地位制以及零的使用。位值觀念，殷人已具備了。甲骨文中紀數法，便是九數表數的原則。戰國時代的九個籌算符號，大致與後世相去不遠。我國古代以文字表數，「又」具有零的功能，例如 209，甲骨文，為二百又九。又如逸周書世俘篇云：「鹿三千五百有八」¹¹⁵。至於在籌算中，是以空位表零。

以空位當零，是以九數和算籌表數的必然結果。就是西方用算子 (Counter) 在算板上加減運算，也是用空位表零。歐洲從古代的羅馬、十世紀的 Gerbert，到十六世紀的 Albert 就是如此¹¹⁶。如， $213 + 1450 + 2378 = 4041$ ，在算板上所示：



* 按：格上橫線每個算子代表 1，兩線之間，表 5。圖見 D. S. p. 184.

至於古希臘，由 Salmis 所發現的一塊完整的大理石算板（與前略同，劃有平行線）以及其他古希臘算板碎片，再根據歐洲中古算板上運算的情形來推測，其中的空位也是當零（圖十七）¹¹⁷。

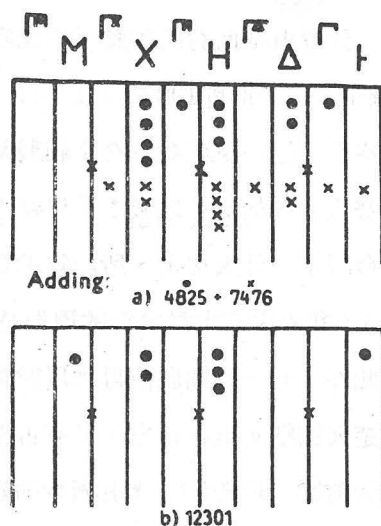


Fig. 129 $4825 + 7476 = 12301$ on the Salmis Tablet.

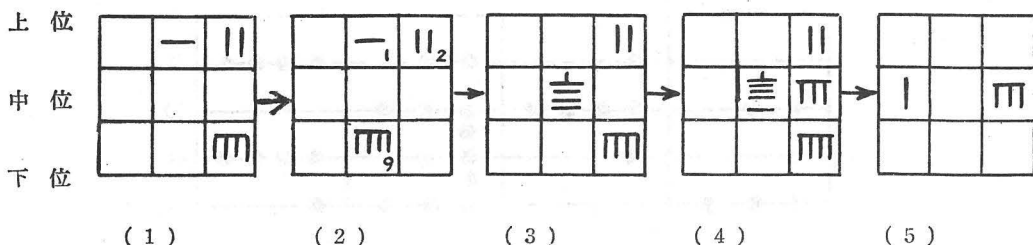
圖十七 Salmis 算板上的加法

我國籌算制度，以空位當零，文獻無明確的記載，不過在一些資料中顯示出有力的佐證。由前引述墨子經文，可知用籌表數，必先建位，以後把每個數碼擺在其當佔的位上。例如用籌表 209，一定在百位上布算籌二，在個位上布 丿 （或 三 ）。於是在十位上就成了一個空位。

關於我國籌算制度以及運算法則，典籍的記載，首先見於第四、五世紀的孫子算經。該書卷上的主要內容是講籌算的乘除法。其中有一條：

以九乘一十二得一百八¹¹⁸。

根據孫子所述乘法法則¹¹⁹，其運算過程：



（照孫子乘法法則，算板上可以不劃格子，但必需定位，算籌數碼之位置及乘數位置由左而右的移動，不能亂。）

(5)圖中， $\text{I} \quad \text{III}$ 即108。所以一百八的讀法與寫法就是表示算板上百位與個位之間是一個空位。這是說明我國文字紀數是算板表數的具體寫照。此種文字紀數，在典籍中常有發現。例如管子地數：「出鐵之山三千六百九山」¹²⁰。又漢文帝十二年的一個墓葬，發現了一部天文書，所記錄的資料是秦始皇元年（246 B. C.）到漢文帝三年（177 B. C.），其中論及木星會合的周期是「三百九十五日百五分」¹²¹。

此外，有一個問題值得加以討論。我國商代十進位的紀數，所表示的位值觀念非常清楚又完整。但在西方，只有古巴比倫六十進位法，有位值的含義¹²²。至於印度到了公元前第二世紀(?)才有極少的數含有位值¹²³。我國何以如此早的時代就能建立起這樣進步的表數系統？這個問題似乎很難解決。若是吾人稍微留意西方數學的發展，也許可以得到答案。

由前述可知，西方在算板上運算，與我國的籌算在基本原則是一致的，也是用空位當零。唯一不同之處，我國造了九個籌算符號，而西方只是單個的算子。至於紀數

方面，希臘用字母；羅馬用符號（I. V. X. L. C 等）配合著加減法。這種情形，均不能產生位值觀念，更不能有九數表數法。

據西人 Karl Menning 的研究，各民族對於語言數與書寫數之間，甚多矛盾。用文字表示語言數，獲得成功的，嚴格的說，只有中國¹²⁴。Karl 所言，甚是。我國從商朝直到近代，書寫的數與語言數完全一致。其中的原因，可能是單音節語言和非拼音的文字的關係。我國語言中僅有 420 個不同的音，加上四聲，也不超過 1700¹²⁵。因此在語法上就必須採用最經濟的原則，盡可能利用已有的語位以組成新的詞彙。例如十一這個數，在拼音語文的民族，可以用二個以上不同的音節造一個新的語彙或文字。但在單音節語言的民族，則甚受限制。我國是使用已有的十和一，組成十一。即使有的方言並不嚴格的遵守此一原則，例如儋州話裏，八與十的發音是 bat↓, tɔp↑，而八十八為 bal↑ bat↓。但因我國使用非拼音文字，不易為 88 再造一新字，只得仍用八與十兩個數字符號去組合。所以我國的表數的符號受了很大的限制，使之不能隨意增加。九個數字符號和位值觀念，於是由此而生。西人 Florian cajori，論及阿拉伯數的時候，曾說：

良好的讀數法結合著良好的記數符號，在有效的 (Proficient) 表數工作中，是不可缺的。據云，亞馬森的 Yanos 沒有三以外的數，因其不能以更簡於 Poettarrarorincoaroac 的語彙以達其意¹²⁶。

此說可以為前述之佐證。

在十進位法中，關於零的符號的產生，除了前述九數結合著位值這一個基本因素以外，筆算也是必需的條件。西方的希臘、羅馬和印度流行用筆在沙盤（灰盤或蠟盤）上運算¹²⁷。而我國一直用籌算進行各種運算，甚至用來解聯立方程式和高次方程式。因此零的符號不能在中國產生，這是必然的。就是當隋唐時代，印度的筆算和零——一點——傳入中國後，但是並未受到重視，也未採用。

此外關於數的排列問題，後世籌算數的排列是由左而右。立成算經云：「大數左畔，小右廂」¹²⁸。至於先秦時代是如何，以現存的資料，尚無法肯定。不過從一些資料來推想，由左而右的可能性為最大。戰國梁幣可分三種等級：甲種，二錢左右；乙種，三錢以上；丙種，重八錢以上，文曰：「梁充鉞五𠄎（原拓片為𠄎，或𠄎）尙𠄎」。

郭氏云：「照它們的重量算來，大約小者兩枚當一銖……，大者，五枚當十二銖」¹²⁹。若此說屬實，則「」為12，則是數是由左而右的排列。

乙、算 術

一、引 言

我國古代的數學，與希臘大異其趣。古希臘在幾何方面有非凡的成就，但對演算的技術（Art of Calculation）却甚少貢獻¹³⁰。而我國恰好相反。從文獻的記載，可以看出古代的兒童數學教育就是以算術為其主要內容（即使幾何上的問題，恐怕也是用算術的方法來處理）。如漢書律曆志論及籌算時：「其法在算術，宣於天下，小學是則，職在太史，羲和掌之。」周禮地官云：

以鄉三物教萬民，……三曰六藝：禮、樂、射、御、書、數¹³¹。

養國子之道，乃教之六藝……六曰，九數¹³²。

「數」和「九數」，大概是指幼童認數——九個籌算符號或數字的書寫以及九九歌訣和簡單的整數四則運算¹³³。所以從「數」和「九數」等詞來看，其內容是與算術有關。

我國先秦在數學方面有不少的成就，却無一本數學專著流傳下來，周髀算經是我國最古老的一本天文數學書；其中含有西周初年以及春秋戰國的資料¹³⁴，但據近人的研究，它成書的年代却在公元前一百年前後¹³⁵。

九章算術是我國另一本古老的數學專著；它是「從周、秦以至漢代中國古代數學發展的一個總結性的著作」¹³⁶；其中某些章節，如「方田、粟米、衰分、少廣、商功等章的內容，絕大部分是產生于秦以前的」¹³⁷，（按：方田、粟米等章，就算術的性質而言，包括了分數的約分、通分和加減乘除法則，各種比例，開平方、開立方等）。

秦漢時的張蒼，善曆數。史記張蒼傳云：「張蒼乃自秦時為柱下史……又善用算律曆，故令蒼以列侯居相府，領主郡國上計者」。魏劉徽認為九章算術是張蒼等人因舊文之遺殘，刪補而成。九章算術注序云：

往者暴秦焚書，經術散壞，自時厥後，漢北平侯張蒼、大司農中丞耿壽昌，

皆以善算命世。蒼等因舊文之遺殘，各稱刪補¹³⁸。

但實際此書之編定，據近人的研究，却是晚至東漢初期（50~100 A. D.）¹³⁹。

因之，當討論先秦數學的時候，周髀算經和九章算術，不能毫無選擇的引用。

先秦諸子之中，偶而涉及一些數學問題，這些零星的文獻，是討論先秦數學的主要資料，除此以外，並以周髀和九章算術以及其他少數文獻補之。因此，關於先秦數學，這裏所論及的問題，可能百不及一。

二、整數四則運算和九九歌訣

我國古代四則運算的程序如何，文獻中均無記載，不過根據前述籌算一節，以及從竹的算字來論，古代一切的運算都用籌算術。先秦列數的形式，大概與後世同，由左而右。加減法，因其簡單，數學書均不說明其運算的程序。乘除法，起初，無疑問的使用累加和累減法（repeated addition, repeated subtraction）。後世始用九九歌訣。周髀云：「矩出於九九八十一。」趙君卿注云：「九九者，乘除之原也」¹⁴⁰。又夏侯陽算經云：「夫乘除之法，先明九九」¹⁴¹。乘除的法則，在孫子算經和夏侯陽算經中講得很清楚。至於先秦，乘除必然也是利用九九表；其運算的程序和形式，則無法深究。

乘、除，我國古代稱「倍」、「分」（見後）。詩經大雅瞻卬，「如賈三倍」。周孝王（909~910 B. C.）時之召卣，其銘文云：

東宮迺曰：「償召禾十秭，遺十秭爲廿秭。如來歲弗償，則倍卅秭¹⁴²。」

其中含有加法和乘法二個運算：

$$10\text{秭} + 10\text{秭} = 20\text{秭}$$

$$20\text{秭} \times 2 = 40\text{秭}$$

有時倍字略去，如考工記所載（見後）。

漢書食貨志（上）引魏李悝之言：

今一夫挾五口，治田百畝，歲收畝一石半，爲粟百五十石，除十一之稅十五石，餘百三十五石。食，人月一石半，五人終歲爲粟九十石，餘有四十五石；（每）石三十（錢），爲錢，千三百五十，除社閭嘗新春秋之祠，用錢三

百，餘千五十。衣，人率用錢三百，五人終歲錢千五百，不足四百五十¹⁴³。

在這一段敘述中，含有加減乘除四種運算，列為算式是：

$$\begin{array}{ll} 1\frac{1}{2}\text{石} \times 100 = 150\text{石} & 30\text{錢} \times 45 = 1350\text{錢} \\ 150\text{石} - (150\text{石} \div 10) = 135\text{石} & 1350\text{錢} - 300\text{錢} = 1050\text{錢} \\ 1\frac{1}{2}\text{石} \times 5 \times 12 = 90\text{石} & 300\text{錢} \times 5 = 1500\text{錢} \\ 135\text{石} - 90\text{石} = 45\text{石} & 1050\text{錢} - 1500\text{錢} = -450\text{錢} \end{array}$$

古代之九九歌訣與近代者略有不同。漢簡，是從「九九八十一」開始到「二二而四」，缺「一九如九」至「一一如一」等九句¹⁴⁴。先秦時代的九九歌訣，大概也是如此。

九九歌訣，春秋時代，可能已普遍流行於民間，韓詩外傳（卷三）：

齊桓公設庭燎，為使人欲見者，暮年而士不至。於是東野有鄙人以九九見者，桓公便戲之曰：「九九足以見者？」鄙人曰：「……夫九九薄能耳，而君猶禮之，況賢於九九者乎！……」¹⁴⁵

此外如劉向說苑的尊賢篇¹⁴⁶，漢書梅福傳，三國志劉廙傳，裴松之注引戰國策¹⁴⁷，皆述及此事。

九九歌訣在先秦時代的著作中，只留下片斷的句子，如：

- 九九八十一（戰國策）¹⁴⁸
- 七九六十三（管子地員）
- 七八五十六（管子地員）
- 七七四十九（管子地員）
- 六七四十二（管子地員）
- 五七三十五（管子地員）¹⁴⁹
- 三七二十一（呂氏春秋，制樂）¹⁵⁰
- 二七十四（管子地員）¹⁵¹
- 六六三十六（荀子大略篇）¹⁵²
- 五六三十（管子海王第七十三）¹⁵³
- 五五二十五（逸周書武順解第三十二）¹⁵⁴

三、分數與分數運算

分數由除法而來¹⁵⁵。周髀算經中，被除數稱「實」，除數稱「法」¹⁵⁶，這些術語，不知是否確為先秦所用的。古代最初可能以「分」表示除。按分有平均分配之意，呂氏春秋仲春紀和仲春紀云：「是月也，日夜分。」高誘注云：「分，等；晝夜鈞也」¹⁵⁷。左傳襄公九年：「知吾子曰，吾三分四軍……」。又昭公五年：「初作中軍，三分公室，而取其一」。這種平均分配法，在數學上就是累次相減的除法（repeated subtraction）。分數 $\frac{a}{b}$ ，我國古代稱b分之a，它的意思是以b平均分a。

商朝可能就使用了分數。商代的曆法是四分曆，歲實為 $365\frac{1}{4}$ 日¹⁵⁸。淮南子（公元前第二世紀）中有一帶分數是 $29\frac{499}{940}$ ¹⁵⁹。九章算術有系統的完成了分數的加減乘除通分和約分等運算法則。所以先秦時代對於分數定有相當的成就。可惜文獻不足，無法詳細闡明。不過在古籍中也留下了一些有關分數和分數運算的片斷資料，今就所見列之如下。孫子兵法軍爭篇：

三分之二¹⁶⁰。

孟子滕文公上：

什一¹⁶¹。

墨子七患第五：

五分之一；五分之二；五分之三；五分之四¹⁶²。

商鞅量：

（秦孝公）十八年（344 B.C.），齊遣卿夫二衆來聘，冬十二月乙酉大良造鞅，爰積一六尊五分尊（之）壹為升（圖二十一）¹⁶³。

按：尊為寸¹⁶⁴，此處是立方寸，積是容積，銘文最後一句的意思是：「十六又五分之一立方寸為一升」，即一升= $16\frac{1}{5}$ 立方寸。

周禮考工記：

十分寸之一¹⁶⁵

綬，參分寸之二¹⁶⁶。

管子度地第五十七、輕重一、地員第五十八：

十分之三；十分之五；什九¹⁶⁷。

十分之二，十分之三，十分之四，十分之五，十分之六，十分之七¹⁶⁸。

戰國策：

三分之一¹⁶⁹。

趙卒之死於長平者，已十七八言十分死¹⁷⁰。

上文之分數以現代之符號表之：

$$\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}, \frac{9}{10}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 16\frac{1}{5}。$$

、周禮考工記爲戰國齊人的著作，常用分數表示工藝產品各部分尺寸的比；表示的方法，除了用長度單位以外，又有下列三種方式¹⁷¹：

1. 如A的長度是B的長度的 n 分之一，可以說成，「 n 分B，以其一爲之A」。

例如考工記：「叁分弓長，以其一爲之尊」¹⁷²。即尊的長爲弓的三分之一。

2. 如A的長度是B的長度的 n 分之 $n-p$ （即 $A = \frac{n-p}{n}B = B - p \cdot \frac{B}{n}$ ），可以說成「 n 分其B，（B）去 p 以爲A」¹⁷³。例如考工記云：「五分其轂之長，去二（原文爲一，照鄭注改）以爲賢；去三以爲軹」¹⁷⁴。此即賢 $= \frac{3}{5}$ 轂，軹 $= \frac{2}{5}$ 轂。

3. 如將A的長度 n ，分爲兩部 m 與 $n-m$ ，於是得到兩個分數 $\frac{m}{n}$ 與 $\frac{n-m}{n}$ 。考工記矢人¹⁷⁵：

鏃矢參分，弗矢參分，一在前，二在後。

兵矢、田矢五分，二在前，三在後。

殺矢七分，三在前，四在後。

周禮正義疏云：「三分其橐之三尺，則一尺在前，二尺在後。以後二尺之重與前一尺相等，則橐前之鐵爲極重矣」¹⁷⁶。此即鏃矢前 $\frac{1}{3}$ 與後 $\frac{2}{3}$ 重量相等。其他的兵矢、殺矢亦皆準此。

考工記表示分數的方法雖有多種，但最常見者，爲 b 分之 a ，此即近代所用者。

關於分數運算，管子記載了數則。如輕重五：

……鹽百升而釜。……今鹽之重，升加分疆，釜五十也；（分疆，半疆也。令使鹽官稅其鹽之重，每一

升加半合爲疆而取之，則一釜。升加一疆，釜百也；升加二疆，釜二百也¹⁷⁷。

管子中量的單位是十進位，卽一釜百升，一斗十升，一升十合¹⁷⁸。分疆、一疆、二疆是 $\frac{0.5}{10}$ 、 $\frac{1}{10}$ 、 $\frac{2}{10}$ ¹⁷⁹。因此管子的意思：一升鹽價，如增 $\frac{0.5}{10}$ （分疆），則一釜鹽售價，增收五十合。於是上述的運算以今式表之是：

$$(1 + \frac{0.5}{10}) \times 100 \text{ 升} = 100 \text{ 升} + 5 \text{ 升} = 1 \text{ 釜} + 50 \text{ 合}$$

$$(1 + \frac{1}{10}) \times 100 \text{ 升} = 100 \text{ 升} + 10 \text{ 升} = 1 \text{ 釜} + 100 \text{ 合}$$

$$(1 + \frac{2}{10}) \times 100 \text{ 升} = 100 \text{ 升} + 20 \text{ 升} = 1 \text{ 釜} + 200 \text{ 合}$$

此外，如管子輕重五關於鍼、刀、耜，輕重十關於鹽等問題¹⁸⁰，都與上述同，屬於分數運算。

周髀算經中有許多複雜的分數運算，如前學淮南子每月的日數是 $29\frac{499}{940}$ 日，周髀算經云：

置周天度數（ $365\frac{1}{4}$ ），以十二月十九分月之七除之，得二十九日九百四十分日之四百九十九，則一月日之數¹⁸¹。

卽：

$$365\frac{1}{4} \div 12\frac{7}{19} = 29\frac{499}{940}$$

周髀中的天文知識，有的確屬先秦時代。而錢寶琮先生云：「周髀的內容主要是西漢初年建立的蓋天學說」¹⁸²。即使錢氏之論確鑿無疑，吾人必須承認，其中的數學知識，一定是在蓋天說未建立以先就具備了。

關於管子輕重篇，有些學者認爲是漢人的作品¹⁸³，不過先秦我國就有了分數運算，則是毫無疑問的。最有力的證據是「商鞅方升」。方升的容積爲 $16\frac{1}{5}$ 立方寸。據唐蘭研究以「劉歆銅斛尺」測之，長、廣、深分別爲五寸四分（12.474厘米）、三寸（6.93厘米）、深一寸（2.31厘米）¹⁸⁴。劉歆銅斛尺與周尺以及秦尺均相同，合2.31厘米¹⁸⁵。不過最近對「商鞅方升」實測的數值，與上述略有出入，其三邊分別爲12.5、7、2.27~2.3厘米¹⁸⁶。這個微小的差數，是由于製造的技術和磨損（指深而言）等因

素。所以此方升容積的計算，其數值仍然應當依照唐氏，即方升的容量 $=5.4 \times 3 \times 1 = 16.2 = 16\frac{1}{5}$ 。按十進的小數，古代都是用分數來表示¹⁸⁷。所以上式當化為分數乘法，即：

$$5\frac{2}{5} \times 3 \times 1 = 16\frac{1}{5}$$

古巴比倫通常以60為定分母，羅馬為12；反之，埃及和希臘則用定分子，常變其分母，例如埃及以 $\frac{1}{6}$ 、 $\frac{1}{18}$ 兩個分數表 $\frac{2}{9}$ ¹⁸⁸。西方直到文藝復興的時代，仍然使用這種分數¹⁸⁹。而我國似乎沒有定分母或定分子的分數，最晚到戰國時代便有了普通分數 (general fraction)，並且有了較複雜的分數運算，如乘除等。

四、指 數

管子地員有這樣的話：「先主一而三之四開，以合九九」¹⁹⁰。李儼先生的解釋是：

$$1 \times 3^4 = 9 \times 9 = 81^{191}$$

若是李氏的解釋不錯，這是說明管子成書的時候，運算中已有了指數。

五、負 數

九章算術方程章引入了負數和正負數的加減運算法則。李儼先生認為負數出現於秦漢之際¹⁹²。李氏可能是根據劉敬叔（劉宋時代）的異苑。該書曾有這樣的記載：

晉安帝（原文，平）有越王餘算策，長尺許；白者似骨，黑者如角。古云，越王行海，曾於舟中作籌算……¹⁹³。

按九章算術，以赤籌表正數，黑籌表負數¹⁹⁴。算籌如只表正數，一種即可，勿需以二種顏色不同的籌。由此來推論，越王所製的黑白兩種算籌，可能是正負兩種籌。越王大概是趙佗，當秦亡時（206 B. C.），自立為南越武王。若異苑所述屬實，負數可能出現於戰國末年。至於說，越王創立了負數，必不可信。

戰國時代，是否產生了負數，姑且不論；不過當時有了負數的概念，則無疑問。如前述李悝之言，五口之家，一歲的開支「不足四百五十」，就減法而言，就是-450。

六、級 數

我國古代的文獻，關於級數，只能見到等差和等比兩種級數。

周髀算經中的「七衡圖」，是以北極為中心的七個同心圓。內衡（最內的圓）的直徑是二十三萬八千里（令其為 a ），衡間（相鄰二同心圓）的距離皆相等，為一萬九千八百三十三里一百步（令其為 d ），於是七個同心圓的直徑長成一等差級數。周髀算經云¹⁹⁵：

七衡周而六間，……一衡之間萬九千八百三十三里之一，三分里之一，即為百步。欲知次衡徑，（一）倍而增內衡之徑。（倍一衡間數，以增內衡。即次二衡徑。）二之，以增內衡徑。（二乘所倍一衡之間數，以增內衡徑。即得三衡徑）。次衡倣（原文為放）此。（六之，以增內衡徑）。

內一衡徑二十三萬八千里……。

次二衡徑二十七萬七千六百六十六里二百步……。

……

次七衡徑四十七萬六千里……。

照周髀原文，這個等差級數的代表項是：

$$L_n = (n-1)(2d) + a$$

故第七衡的直徑是：

$$\begin{aligned} L_7 &= (7-1) \left(2 \times 19833 \frac{1}{3} \text{里} \right) + 238000 \text{里} \\ &= 238000 \text{里} + 238000 \text{里} = 476000 \text{里} \end{aligned}$$

李約瑟先生云，「七衡圖」很類似古巴比倫（約公元前十四世紀）Hilprech 書板上，一個古老的宇宙理論¹⁹⁶。「七衡圖」直徑成等差級數，可能是先秦的數學知識。

周髀算經中，還有一則也是屬於等差級數；即晷影之長，在24節氣的時候，以九寸九分又六分之一分，遞為增減（由夏至到冬至，遞增；反之，則遞減）¹⁹⁷。這一則可能雜有漢人的資料，因為24節氣的名稱，到了漢代始完成。呂氏春秋只有立春、雨水等十個名稱。

關於等比級數，殷墟書契前編（三、二三、六）記載了一組數：

五十犬	五十羊	五十豚
三十犬	三十羊	三十豚
二十犬	二十羊	二十豚
十五犬	十五羊	十五豚

這一組數，相鄰二數的差：

$$50-30=4\times 5$$

$$30-20=2\times 5$$

$$20-15=1\times 5$$

李儼先生云，此三數含有等比的概念¹⁹⁸。

又莊子天下篇記載，戰國的辯者提出的一個命題：

一尺之捶，日取其半，萬世不竭¹⁹⁹。

這個命題，就數學的意義，是一個無窮等比級數，相當於：

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots \rightarrow 1$$

而且其中也含有了極限的觀念，即一個收斂的無窮級數的和是一個定值。就幾何的意義而言，一個有限的線段，可以用無窮多的線段的和來表示之。

丙、幾何

一、引言

幾何學的發展可分為三個階段：第一，是以幾何圖案作裝飾；第二，從測量或求積，產生了直覺的非證明的幾何學；第三，演繹推理的幾何學。世界各古文明民族，如古埃及、巴比倫、印度和中國，在幾何學方面，毫無例外的都是屬於經驗性的²⁰⁰。把幾何學從直覺的經驗，轉變成抽象的邏輯推理的科學，這是希臘人的功績。我國在這一方面僅作了開端的工作。

西安半坡是一個仰韶時期的文化遺跡，在那裏發現了房屋的基地呈正圓形或方形²⁰¹；有的陶環，外面呈正六角形（邊略微內彎），內為正圓²⁰²。又如甘肅蘭州出土

的新石器時代的陶器，繪有圓、菱形、三角形、正方形等幾何圖案²⁰³。這是說明，仰韶時代的人，已經從生活的實踐中產生了幾何觀念。

古希臘的幾何學，原來名稱的意義是“earth” and “measure”，即（土地）測量（surveying）之意；到了歐幾里得（Euclid）始稱為原理（elements）²⁰⁴。這是表明幾何最初是作測量之用。我國古時亦復如此。史記夏本記論到大禹治水時，「左準繩，右規矩」。準繩和規矩都是測量用的工具。又周髀算經趙爽注云：

禹治洪水，決流江河，望山川之形、定高下之勢……乃勾股之所由生也²⁰⁵。
勾股定理是由測量而發現，可謂不移之論。周髀云：「髀者，表也。」表是垂直地面的一根八尺長的竿子，用來測量日影之長²⁰⁶。

此外如工藝和土地面積的計算都是經驗幾何學產生的重要因素。詩經大雅生民：「恒之秬秠，是穫是畝。」鄭箋云：「穀……成熟則穫而畝計之。」又春秋魯宣公15年（594 B.C.）記載，魯國「初稅畝」，即按畝收稅。所以對各種形狀的土地面積，便需要加以計算。於是矩形、三角形、梯形面積的算法，便漸趨完備。這些面積計算法最初都是未證明的。又如車輪、容器以及其他工藝的製造，必然的會產生有關於圓、體積、角度等等的幾何知識。

終之，我國古代的幾何知識絕大部分都是經驗性的。至於理論幾何學肇始於墨家和名家。可惜秦漢一統之後，這二個學派，瞬即衰亡了。因此理論幾何學未能繼續的發展。

二、製圖工具——規和矩

規和矩是平面幾何學所使用的二種工具。規即近代的圓規；矩，直角三角尺。世本云：「垂作規、矩。」宋注云，垂，黃帝工人，或舜臣²⁰⁷。此說恐非事實。就商代工藝進步的情形而論，例如，口為正圓形的青銅尊以及車輛等，造這些工藝品的過程時，使用規和矩，這是極為可能的。

戰國時代的典籍，墨子、孟子、荀子、莊子、韓非子和周禮等書，均提及規矩²⁰⁸。如荀子賦篇第二十六：

圖者中規，方者中矩²⁰⁹。

關於規和矩的式樣，由漢、隋五處的畫像來看：規如剪刀形的兩足木器， $\times$ 或 ∇ ；矩如 $\triangle$ 或 $\perp$ （圖十八）²¹⁰。又據說文：矩，卽巨，從工。所以工大概也是古代用的直角尺。



圖十八 唐高昌墓出土的絲絹天文圖

三、考工記中的實用幾何學

考工記記錄了古代手工業的製造和規格。其中透露了一些古代實用數學的知識。以幾何而論，包含了角度的名稱和定義。考工記：

戈廣二寸，內倍之，胡三之，援四之……倨句外博。……戟廣寸有半，……倨句中矩²¹¹。

爲磬，倨句一矩有半²¹²。

半矩謂之宣。

一宣有半謂之櫨。

一櫨有半謂之柯。

一柯有半謂之磬折²¹³。

「倨句」在考工記乃表角之大小；「倨句外博」，乃鈍角。周禮正義云：

蓋經凡云倨句者，止論角度之侈弇與弦徑無涉²¹⁴。

外博者，援與胡不正方也（即不正交）²¹⁵。

至於「倨句中句」或「一矩」皆是 90° 的直角。周禮正義，疏：

倨句中句：中矩，云者，援與胡一縱一橫，適正方也²¹⁶。

蓋一矩爲九十度。益以半矩，則百三十五。此即磬石之倨句也²¹⁷。

錢寶琮先生亦從此說²¹⁸。所以上述「宣」、「櫨」等角度的度數是：

$$\text{矩} = 90^\circ$$

$$\text{宣} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$$

$$\text{櫨} = 45^\circ + \frac{1}{2} \cdot 45^\circ = 67^\circ 30'$$

$$\text{柯} = 67^\circ 30' + \frac{1}{2} \cdot 67^\circ 30' = 101^\circ 15'$$

$$\text{磬} = 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 135^\circ$$

$$\text{磬折} = 101^\circ 15' + \frac{1}{2} \cdot 101^\circ 15' = 151^\circ 52' 30''$$

考工記中還有用圓弧來表圓心角，築氏：

築氏爲削，長尺博寸，合六而成規²¹⁹。

鄭注云，削爲書刀。但近代的學者主張削是齊國的刀幣²²⁰。按：「齊刀」的背微成弧形，六把刀幣合圍成一環形。於是每把刀所對的圓心角爲 60° 。又戰國楚墓出土的二件削，背的弧度恰好 30° ²²¹。十二把削合成一圓，每把削所對的圓心角爲 30° 。又考工記弓人：

爲天子之弓，合九而成規；爲諸侯之弓，合七而成規；大夫之弓，合五而成規；士人之弓合三而成規²²²。

以上所述「是用圓心角的大小來規定弓背的曲率」²²³。中國古代天文學家把一周天分爲 $365\frac{1}{4}^{\circ}$ ，而太陽的視運動每日行走一度（約 $5'98''$ ），也是用圓周的長度來量度圓心角。因此，我國古代對數學上弧度的問題，有了清晰的觀念。

此外，由以上所述還可推測古代可能還有以下兩種幾何知識：

1. 等弧對等弦。
2. 圓周可以六等分，順次聯接其分點，則成一正六邊形。

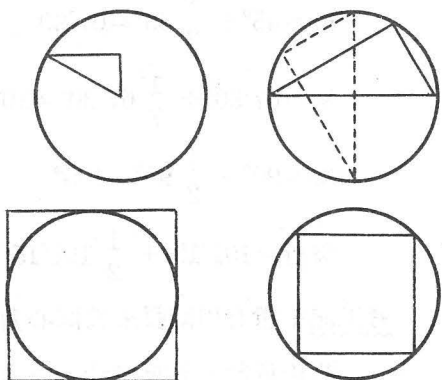
古代取 $\pi = 3$ ，可能即由內接正六邊形得來的。

四、周髀算經中的幾何知識

周髀算經雖然成書於漢代，但它却是「集結周秦以來適應天文學上的需要逐漸積累起來的科學研究或成果而寫成的」²²⁴。其中的一些幾何知識並不深奧，包括了圓、畢氏定理和相似直角三角形對應邊成比例等等。它們絕大部分可能都是先秦已有的幾何知識。今分述如下：

1. 「合矩以爲方」²²⁵，即：二個全等的直角三角形合成一個矩形，或一正方形。

2. 「環矩以爲圓」²²⁶，即：以股（或勾）的一端爲圓心，（弦爲半徑），旋轉矩，則勾的端點的軌跡，即成一圓²²⁷。或以弦的中點爲圓心，旋轉矩而成圓。



3. 「方中爲圓者，謂之圓方；圓中爲方者，謂之方圓也」²²⁸。按：圓方是圓內切於正方形；方圓是圓外接於正方形²²⁹。

4. 圓周的長等於直徑乘 π ， π 取 3。周髀：「內一衡徑二十三萬八千里，周七十一萬四千里」²³⁰，即： $714000 = 238000 \times 3 (=2r\pi)$ 。

5. 相似直角三角形對應邊成比例：周髀中某些天文上的測量問題，都是利用相似比。如周髀云：

周髀長八尺，夏至之日，晷一尺六寸。髀者股也，正晷者句也。以髀爲股，以影爲句。股定，然後可以度日之高遠。正晷者，日中之時節也。正南千

里，句一尺五寸；正北千里，句一尺七寸。日益表南，晷日(影)益長。候句六尺，……從髀至日下六萬里而髀無影。從此以上至日，則八萬里²³¹。

此段的意思：夏至時立一8尺長的竿子($\overline{AB}$)，垂直地面，稱為髀。髀向正南移一千里，則日影短一寸；向北，多一寸。當日影($\overline{AC}$)六尺時，則正南六萬里的地方($\overline{AD}$)，髀無影。從此處，髀頂至太陽($\overline{GE}$)，高八萬里。如圖所示：

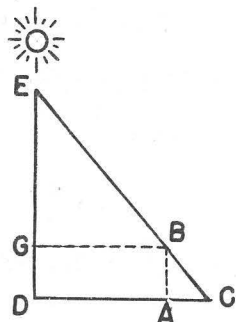
$\overline{BA}$ 、 $\overline{ED}$ 垂直 $\overline{DC}$ ，又 $\overline{BG} \parallel \overline{DC}$

$CA=6$ 尺 $=60$ 寸 故 $AD=1000$ 里 $\times 60=60000$ 里

因為， $\triangle DEC \sim \triangle ABC$ ，故 $\frac{DE}{8(AB)} = \frac{CD}{6(CA)}$

所以， $DE=8 \times \frac{60000\text{里}+6\text{尺}}{6} = 80000\text{里}+8\text{尺}$

$EG=80000$ 里



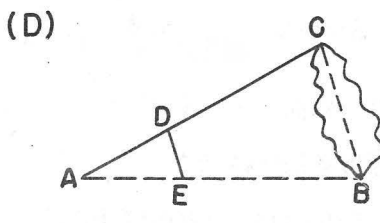
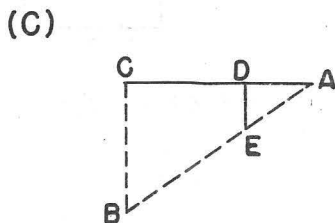
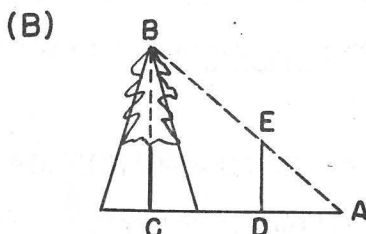
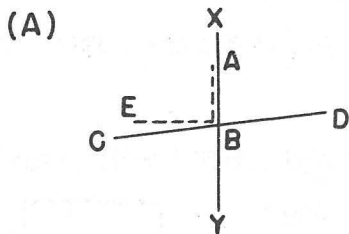
關於測量的問題，周髀有這樣的話：「平矩以正繩，偃矩以望高，覆矩以測深，臥矩知遠」²³²，這一段所包含的問題，共有四種情形：

(1)「平矩以正繩」，如圖(A)設 $\overline{xy}$ 為一鉛直線， $\overline{CD}$ 與之相交，置矩如圖，若矩的一邊 $\overline{EB}$ 與 $\overline{CD}$ 相合(平)，則 $\overline{CD}$ 為水平線。

(2)「偃矩以望高」，如圖(B)

(3)「覆矩以測深」，如圖(C)

(4)「臥矩以知遠」，如圖(D)



圖(B)、(C)、(D), $\overline{AD}$ 、 $\overline{DE}$ 爲矩之直角邊, $\overline{AC}$ 之長可直接量之。令 $\overline{ED} // \overline{BC}$, 於是 $\overline{BC}$ (高、深、遠), 根據相似三角形對應邊成比例:

$$\frac{BC}{ED} = \frac{CA}{AD} \quad \text{所以 } BC = \frac{ED \cdot CA}{AD}$$

6. 畢氏定理 (Pythagoras Theorem), 我國古代稱爲勾股定理。垂直地面的表稱股, 日影爲勾, 斜邊爲弦, 或稱斜至日。勾股定理最初僅是一個特例, 如「勾廣三, 股修四, 徑隅(弦)五」²³³, 以後始發現它的一般性, 如「勾、股各自乘, 並而開方除之得邪至日」²³⁴, 亦即:

$$\text{弦} = \sqrt{\text{勾}^2 + \text{股}^2}$$

勾股定理, 周髀並未證明; 直到三國時代的趙君卿始予以證明²³⁵。

五、九章算術中的幾何知識

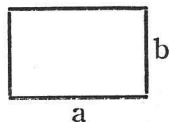
九章算術是我國第一本水準很高的數學專著, 編定的時代是在東漢初年 (最遲是東漢中期)²³⁶。它是「積累了許多世紀數學家們的智慧, 經過許多人增刪修改, 而後寫定的」²³⁷。九章算術所包含的各種算法是在秦以前所立定的, 漢人又加以補充和修訂²³⁸。這部書一共收了 246 個問題, 其中有的是秦以前傳下來的, 例如「方田、粟米、衰分、少廣、商功等章的內容, 絕大部份是產于秦以前的」²³⁹。而其中一些簡易的幾何問題就如下文所舉者, 當是先秦流傳下來的。今舉其直線形數則:

1. 矩形: 九章算術中的方田, 就是矩形的田; 矩形的底稱廣, 高爲從 (即縱), 方田術曰:

廣、從步(長度的單位)數相乘得積步, 以畝法二百四十步除之, 即畝數²⁴⁰。

令 a, b 爲矩形的底和高 (步數), 則矩形面積和畝數:

$$S = a \cdot b \quad \text{畝數} = \frac{a \cdot b}{240}$$



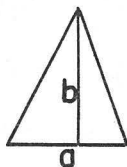
方田中求面積, 有許多的問題必須用分數乘法, 同時也立下了分數的乘法法則。乘分 (分數乘法) 術云:

母相乘爲法, 子相乘爲實²⁴¹。

2. 三角形面積：方田中的「圭田」即三角形的田；底(a)、高(b)稱廣和正從，面積的算法，術云：

半廣以乘正從²⁴²。

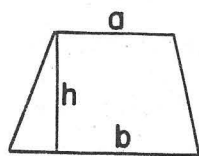
故三角形的面積 $S = \frac{1}{2}ab$



3. 梯形面積：方田中的「邪田」或「箕田」即梯形的田。梯形上底稱「踵」(a)，下底為「舌」(b)，高為「正從」(h)，梯形面積的求法，術曰：

並踵、舌而半之，以乘正從²⁴³。

故梯形面積 $S = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h$



4. 圓面積：方田中的圓田，即圓形的田，面積的算法，術曰：

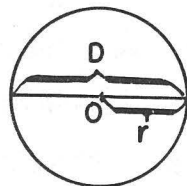
半周、半徑相乘得積步。

周、徑相乘四而一（即 $\frac{1}{4}$ ）。

徑自相乘，三之，四而一²⁴⁴。

令圓周的長為P，直徑為 $D(=2r)$ ，又取 $\pi=3$ ；據術，圓面積：

$$S = \frac{P}{2} \cdot r = \frac{P \cdot D}{4} (= \frac{\pi \cdot 2r \cdot D}{4}) = \frac{3 \cdot D^2}{4}$$



關於古代面積的算法，李儼先生的意見：

古代計算田地面積，從正方形、長方形到三角形、圓形、梯形、四不等邊形等；這是有不同的社會基礎。這變化大概也在春秋、戰國之際²⁴⁵。

按古人對面積知識，主要的是從田地的大小獲得的。孟子滕文公上、周禮小司徒均提及井田的制度。井田的制度，一般的情形是封建貴族將一百畝土地分給一夫耕種，八家共一井，中間為公田。當封建制度漸次崩潰，土地變為私有，國君便開始「稅畝」。公羊傳（魯宣公十五年）「履畝而稅」；注云：「履踐案行，擇其善畝，穀最好者，稅取之」²⁵⁰。所以古代政府無論是為著分配土地或是征收賦稅，都需要有計算土地面積的知識。就是農民本身而言，也需要具備此等知識；例如，一塊土地需要的種子和勞動力，收穫的數量，多少的土地始能維持一家的生活，都與土地面積有關。

古代土地面積以畝為單位。周禮鄭注引司馬法云，「六尺為步，步百為畝」²⁴⁶。

漢書食貨志(上)，常論及古代井田制度的時候，也是說「步百爲畝」。古代的封國，大概多數用百步爲一畝的制度，但秦國却是 240 步爲一畝。段氏說文注(田部)：

晦……步百爲晦。秦田二百四十步爲晦。秦孝公之制也。……²⁴⁷

九章算術方田中，也是用 240 步爲一畝的制度，所以其中的一些問題，可能就是秦國流傳下來的。

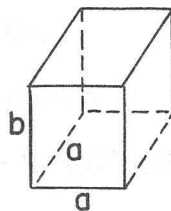
古代的一畝，不論是百步或 240 步，都是說明了單位土地面積的計算法，從而可以推得一般的矩形土地計算法則。土地面積的計算，最初可能只限於正方形和矩形，隨著社會的進步，以後又擴及其他的形狀。大概到了戰國時代，對許多直線形面積的計算，大致都已達到正確無誤的程度。

九章算術商功一章中，有多種體積的計算。其中最簡單的一種是長方體。如商功中的一例：

今有方堞塼，方一丈六尺，高一丈五尺，問積幾何？

答曰：三千八百四十尺。

術曰：方自乘，以高乘之，卽積尺²⁴⁸。



如右圖，體積 $V = a \cdot a \cdot b = a^2 b$

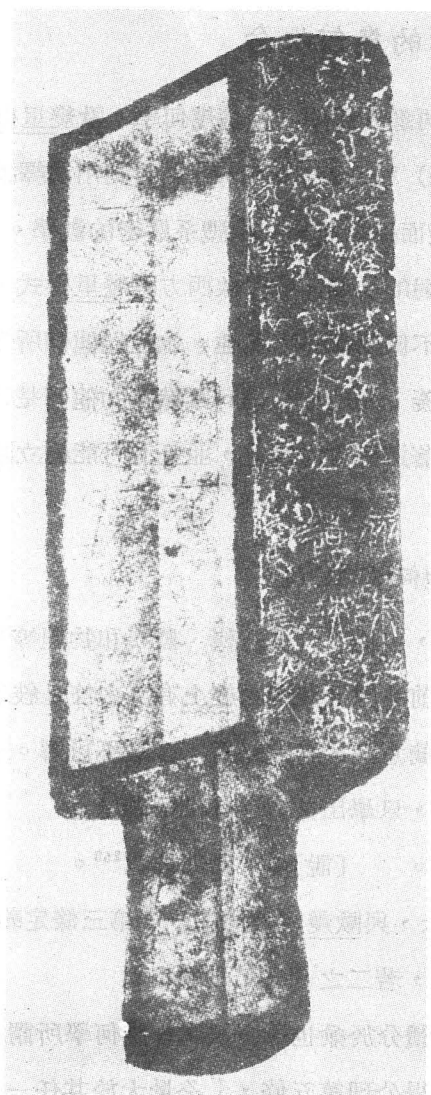
上述體積的計算，當是先秦時代的知識，吾人可以由戰國時代遺留下的量器推得。近來發現了一個方形的古器物，柄上的銘文，「斛斗并」。據研究，此器是戰國的方箭，箭的口徑，「當今 1.75 厘米見方，內深也是 1.75 厘米」(圖十九)²⁴⁹。由此可以知得，一般的正立方體體積計算當是：

$$V = a^3$$

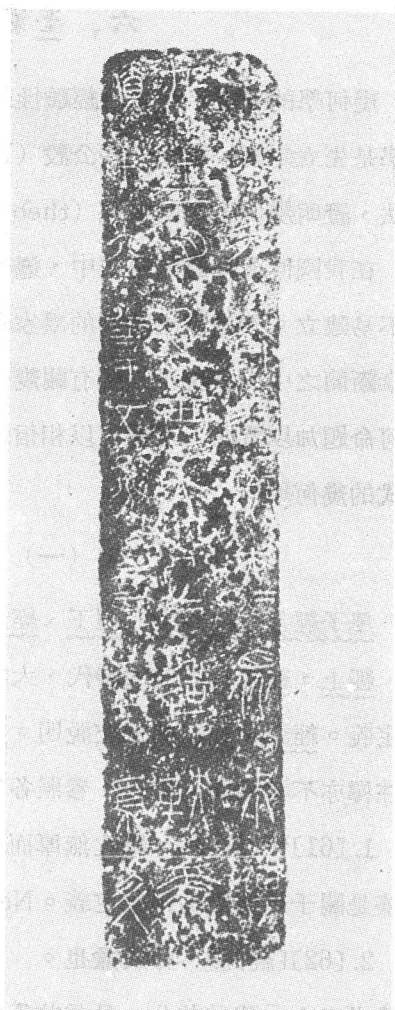
又前舉「商鞅方升」(圖二〇)，1 升 $16\frac{1}{5}$ 立方寸。但根據實測有誤差²⁵⁰。此正說明 $16\frac{1}{5}$ 立方寸，絕非「量」出來的數據，而是由公式算出來的結果。所以一般的長方體體積，其計算的公式應當是：

$$V = a \cdot b \cdot c \quad (a, b, c, \text{爲長方體三邊的長})$$

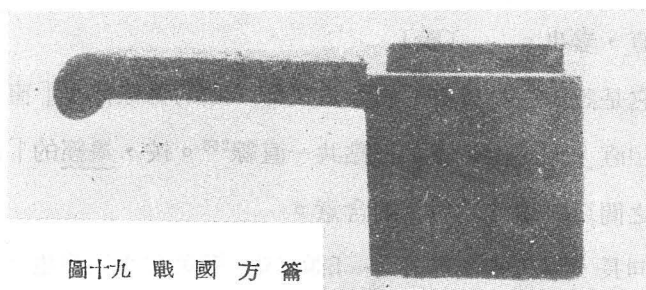
此外九章算術中，表示體積的容量稱之爲積，這與「商鞅量」所用者是同一詞。由此亦可證明九章算術是承接著戰國的數學而來的。



圖二〇 戰國商鞅量



圖二一 商鞅量的銘文



圖十九 戰國方籥

六、墨家和名家的幾何概念

幾何學的發展，是先由經驗性的直覺，再進入證明的理論幾何學。歐幾里得的幾何學是先立定義，設立一些公設（Postulate）和公理（axiom），再利用演繹推理的方法，證明幾何學上的定理（theorem），從而建立起來一種體系嚴密的數學。

在我國傳統知識的領域中，邏輯學是最弱的一環。所以像西方歐幾里得式的幾何學不易建立。不過戰國時代的墨家和名家，不僅對邏輯有興趣，並且從他們所留下的殘章斷簡之中，發現了一些有關幾何學的定義、公理和命題。雖然不知他們是否曾對幾何命題加以證明，不過可以相信他們是朝著這個方向邁進，並且有可能建立歐幾里得式的幾何學。

（一）墨家的幾何學的定義

墨子經上、經說上、經下、經說下四篇，包括了一些邏輯、數學和物理等論題。

經上，經說上完成的時代，大約在公元前第四世紀²⁵¹。經上有許多條是敘述幾何學定義。經說是經文的補充說明。墨經，字簡意賅，又有錯亂，多數不可解。學者們的註釋亦不盡相同。下文，參照各家的說法，只舉出其意義比較明確者。

1. [61]²⁵²[經]端，體之無厚而最前者也。 [說]端，是無間也²⁵³。

此條是關於幾何點的抽象定義。Needham云，與歐幾里得的第一、第三條定義同²⁵⁴。

2. [62][經]體，分於兼也。 [說]體，若二之一，尺之端也。

譚戒甫云：「體言其分，兼言其全，故曰，體分於兼也……尺，即幾何學所謂線，尺之端者，線之點也」²⁵⁵。按，此條與歐幾里得公理第五條，「全量大於其任一分量」(the whole is greater than the part)²⁵⁶相似，又有「直線是點的集合」之意味。

3. [57][經]直，參也。 [說]

此條的說，缺。它是說明三點共線的條件是任何二點的聯線都要「直」。劉徽在海島算經所謂的「參相直」²⁵⁷，便是表示三點共一直線²⁵⁸。按，墨經的「直」又有歐幾里得幾何學「二點之間以直線為最短」的含意。

4. [53][經]同長，以正相盡也。 [說]同，榑與狂之同長也。

譚氏云，榑即門門，狂乃函門之榑。門與榑皆同長²⁵⁹。

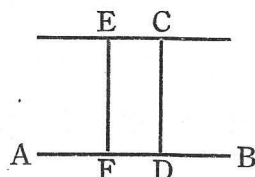
5. [68][經]比，以有相櫻有不相櫻。 [說]比，兩有端而後可。

譚氏釋：「比，比之繁文也」²⁶⁰。梁啓超云：「櫻，相接觸也」²⁶¹。此條是關於線段大小的比較。比較兩線段相等或不等，必須線段上有二個固定點，即「兩有端而後可」。

6. [52][經]平，同高也。 [說]謂臺執者也，若兄弟。

據譚氏云，此條是二線平行的定義，如右圖：

$\overline{CD}$ 、 $\overline{EF}$ 垂直且等於 $\overline{AB}$ ，則 $\overline{CE} // \overline{AB}$ ，Needham 亦從譚氏。按上條，多數學者都認為經說缺²⁶²。所以此條能否如譚氏和 Needham 所言，尙難確定。不過這是一條幾何命題，當無疑問。



7. [41][經]窮，或有前不容尺也。 [說]窮，或不容尺，有窮；莫不容尺，無窮也。

錢寶琮先生認為此條是解釋「有窮」和「無窮」（有限，無限的線或面）。錢氏：

用尺來度量路程，如果量到前面只剩不到一尺的餘地，那麼，這路程是「有窮」的。如果繼續量過去，前面總是長于一尺，那麼，這路程是「無窮」的²⁶³。

8. [59][經]方，柱隅四謹也。 [說]方，矩見支也。

譚氏云，柱，方之邊；隅，方之角。謹，即權，正也。四謹，四個直角²⁶⁴。又孫詒讓云：「見支，疑亦當爲寫交」²⁶⁵。說的意思：方是用矩畫成的。Needham 云，此條與 Euclid 定義30、31同²⁶⁶。

9. [54][經]中，同長也。 [說]中，心；自是往相若也。

譚氏云：「此言幾何學圓心及半徑之理。幾何原理云：圓者，自界至中心作直線俱等」²⁶⁷。

10. [58][經]圓，一中；同長也。 [說]圓，規寫交（原作支）也。

此條與上條同，Needham 云，與 Euclid 定義17類似²⁶⁸。

11. [40][經]字，彌異所也。 [說]字，冡東西南北。

冡，據胡適云，即蒙字²⁶⁹，包括的意思，係指空間而言²⁷⁰。Needham 云，與 Euclid 的公設（Postulate）1、2類似²⁷¹。

12. [55][經]厚，有所大也。 [說]厚，惟無所大。

此條係指體積而言。高享墨經通註云，說，當作「惟無厚，無所大」²⁷²。按，厚指體積。說文：「厚，山陵之厚」，體積有容積，故能有所大。說的意思：抽象無厚之面不能累積成體積。因此就「無所大」（大，指容積的大）。

墨經中還有其他與幾何有關的條文，但因其意義不夠明確，故予以刪略。

在以上的十二條，墨家討論了幾何上的點（1~2）、線（3~6）、圓（9~10）、空間和體積（11~12）。從這些片斷的句子，可以清楚的看出，墨家對幾何學，有意擺脫感性的直覺知識，嘗試著建立起抽象的幾何觀念。

（二）名家的幾何觀念

戰國有一個學派稱為名家。他們與後期的墨家同樣的提出了一些屬於邏輯的命題。此派的末流雖然不免陷於詭辯之弊，但其中不乏科學性的思辯和抽象幾何學的概念。

莊子天下篇引惠施的歷物，其中與幾何有關者，二條：

1. 至大無外謂之大一；至少無內謂之小一。

從哲學的觀點而言，「大一」是超越了時空的「本體」；「小一」類似印度、希臘的原子²⁷³。從數學思想出發，可以用空間的整體解釋「大一」的「至大無外」；用空間的一點或時間的瞬時來解釋「小一」的「至少無內」²⁷⁴。實際，照數學的觀點，「至大無外」、「至少無內」和無限大、無限小的意義相同。無限大，是指一個很大的變數，它永遠大於所指定的任何數。至大無外，如指空間而言，乃是說：沒有比整體的空間更大的空間；如指數，沒有比此數再大的數。「至少無內」，亦同。

2. 無厚不可積也，其大千里。

幾何學裏的線和面都是「無厚」而「有所大」（面與線的大）。惠施肯定的說，累積線段不能成面，累積面不能成體，對於線和面的觀念，比墨經更為進步²⁷⁵。

莊子天下篇留下了辯者桓團和公孫龍的一些言論。其中關於幾何學有四條，莊子天下篇：

1. 矩不方。

2. 規不可為圓。

矩和規是畫方、畫圓的工具，但用此等工具作出來的方和圓，不是幾何學上真正的方

和圓²⁷⁶。

3. 輪不輾地。

此條是說明車輪與地面接觸的僅有一點，具有圓與直線或平面相切的概念。

4. 一尺之棰，日取其半，萬世不竭。

李儼先生云；

在這個命題裏，指出一個數學理論，就是：一個有限的線段（一尺）可以被無限多個線段之和（日取其半）表示出來。後來劉徽的「割圓術」（按：利用內接正 n 邊多邊形的面積求 π 的值），也許是由這個理論體會出來的²⁷⁷。按「割圓術」最基本的觀念是極限，當增加內接正 n 邊多角形的邊時，其周界與面積以圓為極限。劉徽云：

割之彌細，所失彌小，割之又割以至於不可割，則圓、周合體而無所失矣²⁷⁸。

劉徽在這裏表示出的極限觀念是非常明確；與辯者之言，可謂一脈相承。

戰國名家的著述，所留下來的比墨家更少。惠施雖然「多方，其書五車」²⁷⁹，但他的言論所留下來的，不過片言隻字。其他的辯者，亦復如此。所以吾人很難瞭解他們對理論的幾何學究竟達到一個什麼樣的程度。僅以現有的數條資料來看，他們的觀念似乎比墨家更進一步。

丁、結 論

初民表數的方法有多種，而我國最常用者可能是木條或草莖，此種工具的使用，大概始於商朝以前，歷經殷、周，到了春秋戰國便完成了算籌表數和運算法則。

我國是用十進位，一至十的紀數符號，最初可能都是木條或草莖表數的象形字。商代甲骨文表數文字中，有了位置觀念和九數表數的原則。最晚到了戰國末期便完成現代十進位表數法。即以九個算籌符號（1~9），加以空位表零，來表任一自然數。

古代整數四則運算都是用籌算進行。我國對分數的處理，有極高的成就，先秦時代，可以自由的表示任何種分數，並用籌算進行分數加減乘除四則運算。

先秦大約有了算術、等比兩種級數。負數出現於戰國末年或秦統一之後。不過負

數觀念，在戰國中期便產生了。

我國傳統的數學，以算術和代數的成就為最高。其最根本的原因，是我國最早發明了用九數和零的表數法。而九數位值制的表數法又可能是由於我國使用的象形文字和單音語言的關係。

我國用籌作運算的工具，對於我國數學的發展確有貢獻，但同時也是一個障礙。因為一切運算都用籌進行，所以數學符號無從發生，用符號表示的定理和公式都付闕如。

古代的幾何學都是由經驗而來。在這個範圍內，為著實用的目的，我國古代獲得了不少的幾何知識，就如前述，有關矩形、圓、直角三角形、角度等等的問題。至於直線形的面積、體積以及圓面積的近似值等等計算的方法，墨氏定理以及與直角三角形有關的一些知識，先秦時代都已具備了。

依據一些幾何定義和小數的公設、公理，再利用邏輯方法所建立的理論幾何學，這是希臘人不朽的傑作。我國未能完成歐幾里得式的幾何學，此事對我國的科學思想的發展，可能相當的不利。

西方幾何學的發展是從直覺經驗的幾何學到理論的幾何學，我國亦不例外。吾人可從戰國的墨家和名家窺其端倪。他們對邏輯方法有興趣，並且試圖擺脫直觀而轉入抽象的概念。墨家和名家對幾何學上的基本要素，如點、線、面以及一些幾何圖形，都給予比較抽象的界說。幾何學上的公理，在墨經中也有一些痕迹。墨家和名家是否曾依據定義、公設、公理，使用邏輯方法去證明一些幾何定理？抑或只限於一些幾何學的定義和一些命題？此事殊難遽下斷言。今本墨子、公孫龍子皆殘缺不全，惠施的言論，僅在莊子天下篇留下了「歷物十事」。因此，今日無法窺見墨家和名家思想的全貌，及其對幾何方面的成就。但吾人可以斷言，如果這個學派在秦漢一統之後，仍然繼續存在和發展，則歐幾里得式的幾何學可能會在我國出現。可惜，這二個學派很快的就消滅了，並且他們的思想對我國的學術發生的影響似乎非常少。我國未能建立起歐幾里得式的幾何學，Needham 根據三上義夫和傅斯年先生的意見，認為我國形式邏輯未能發展成熟，以及過強的關聯式的思想所致²⁸⁰。此問題若從表層來看，確乎是如此。實際，其中還有其他更重要的因素。

我國傳統的數學，雖有很大的成就，但始終未能跳出實用的藩牢，成為純理論性的獨立科學，此中最根本的原因，可能是數學一直掌握在政府的官吏手中。換言之，數學是為曆法、建築、水利、運輸、賦稅、商業等等而服務。數學在實用的範圍之內，抽象的觀念，邏輯的證明，是不會得到鼓勵的。古埃及、巴比倫的幾何學，和我國同樣的情形，以實用為主。但是當轉移到希臘哲學家的手中以後，數學便從實用的目的，變成純理論的科學。希臘的數學家，塞勒斯（Thales）、畢達哥拉斯（Pythagoras）、伯拉圖（Plato）、亞力斯多德（Aristotle）、歐幾里得（Euclid），無一不是哲學家或教師。但在我國適得其反。古代的數學家是掌天文的疇人和計吏²⁸¹。吾人可以斷言，數學若不經過哲學家的邏輯思辨的洗禮，（我國先秦諸子，可以稱為政治思想家。）數學只能作天文、工藝和商業的奴僕。

至於三角學，我國傳統的數學中，毫無建樹。古代雖然曾利用直角三角形邊的比作測量工作，但所謂三角函數則從未出現。

總之，若從全面觀察我國數學發展的歷史，漢代是一個重要時期。它不僅是承先啓後，而且塑造了我國傳統數學的獨特風格。然而漢代數學却是承接先秦的知識向前推展。錢寶琮先生討論漢代數學的時候，他說：「九章算術所包含的各種算法是漢朝數學家們在秦以前流傳下來的數學基礎上，適應當時的社會需要而補充修訂的」²⁸²。就作者之淺見，確乎是如此。我國傳統數學的特點，可以說在先秦時代便孕育成形；不論是它的長處，或是缺點，都深深的影響了我國數千年數學的發展。例如十進位的表數法和籌算，促使了我國算術、代數的發達，以及後世珠算的出現。但同時也限制了它的發展和數學符號的發生。墨家和名家未能完成理論的幾何學。此後，在幾何方面的發展，始終未能完成一套邏輯嚴密的幾何學。從而，證明的數學，是我國數學上最弱的一環。在先秦時代，就目前所有的資料而言，沒有三角函數的蹤跡。而我國對三角學方面，可謂毫無貢獻。三角函數雖然曾由印度傳入，但我國的數學家並未予以重視，更未能進一步向前發展。

由以上所論，先秦時代的數學發展，對我國傳統數學的影響，可謂非淺。

徵引書目之代號

- D. S., David Engne Smith, History of mathematics, vol. II. 1952。
- F. C., Florian Cajori, A History of Elementary mathematics, 1897。
- S. C. C., Joseph Needham, science and civilisation in China, vol. III, 1959。
- T. D., Tobias Dantzig, Number, the language of science, 1930。
- D. S., Donald Smeltzer, Man and number, 1958。
- K. M., Karl Menning, Number words and number symbols, 1970。
- 數史，錢寶琮，中國數學史，1963年，科學出版社。
- 簡史，李儼、杜石然，中國古代數學簡史。
- 史料，李儼，中國古代數學史料。
- 古，李佐賢，古錢滙。
- 前、(卷)、(頁)、(片)，羅振玉，殷虛書契前編。
- 後、(卷)、(頁)、(片)，羅振玉，殷虛書契後編。
- 續、(卷)、(頁)、(片)，羅振玉，殷虛書契續編。
- 考、(卷)、(頁)，羅振玉，殷虛書契考釋。
- 存、(上編)、(拓片)、(下編)、(摹片)，胡厚宣，甲骨續存。
- 佚、(片)，商承祚，殷契佚存。
- 粹、(片)，郭沫若，殷契粹編。
- 明、(摹片)，明義士，殷虛卜辭。
- 庫、(摹片)，庫方二氏所藏甲骨卜辭。
- 甲、(片)董作賓，殷虛文字甲編。
- 乙、(片)，董作賓，殷虛文字乙編。
- (上) (一)、(二) 上輯 (一)、(二)
- 丙、(中) (一)、(二)、(圖版)，張秉權，殷虛文字丙編，中輯 (一)、(二)
- (下) (一)、(二) 下輯 (一)、(二)。

附 註

1. David Engne Smith, *History of Mathematics*, Vol. II, Preface, p. III, 1925年。又見, Donald Smeltzer, *Man and Number*, p. 25, 1958年。
2. Tobias Dantzig, *Number, the Language of Science* (1930), p. 14。
3. Donald Smeltzer, *Man and Number*, (1958), p. 25。
4. 同前。
5. 陸懋德先生在中國古文數各考原中,引西方人類學家之言:「現存野蠻民族之計數,有用手者,有用足者,有用豆粒者,有用果核者,又有用石子者。凡此又各隨各族之環境而異其用途者也。」(燕京學報 40期, p. 155, 1951年)。
6. Florian Cajor, *A History of Elementary Mathematics*, 1897年, p. 1。
7. D. S. p. 21。
8. D. S. p. 15。
9. F. C. p. 3。
10. D. S. pp. 21-22。
11. D. S. pp. 22-23。
12. F. C. p. 17。
13. F. C. p. 27。
14. Charles Singer E. J. and A. R. Hall, *A History of Technology*, Oxford, 1956年, p. 745; 圖 746。
15. William A. Mason, *A History of the Art of Writing*, New York, 1928年, p. 119 圖 p. 120。
16. D. S. p. 174。
17. 作者幼年所見。
18. F. C. p. 17。
19. Smith, p. 45, 68。
20. William A. Mason, *A History of the Art of Writing*, p. 81, 圖 p. 80。
21. Karl Menning, *Number Words and Number Symbols*, 1970年 pp. 252-255。
22. K. M. pp. 254-255。
23. 李家瑞, 雲南幾個民族記事和表意的方法, 文物, 1962, 1, pp. 14。
24. 十三經注疏, 卷 8, p. 80。
25. D. S. p. 55。
26. 文物, 1962 (1) p. 14。
27. 同前, p. 14。
28. 墨子閒詁, 卷 12, p. 18。
29. 楊伯峻, 列子集釋, 卷 8, p. 173。
30. 古今遺史, 卷 2, p. 26。
31. S. C. C., Vol. II. p. 343。
32. 李孝定, 中國文字的原始與演變, 史語所集刊第 45 本 p. 362, 366。鄭德坤, 中國上古數名的演變及其應用, 香港中文大學學報第一卷第一期抽印本, p. 45, 這些符號的解釋也不盡相同, 例如子省先生釋 Ⅱ 爲二十, 見關於古文字研究的若干問題, 文物, 1973, 2, p. 32。
33. 甲骨文編第十四與甲骨文集釋有一字爲, 釋爲五, 此字孫、李二氏根據龜甲獸骨文字(卷一, 頁十八, 第十三版), 該數字符號最上一橫, 只有一半。又殷虛文字丙編上輯, 圖版壹捌壹, 有一字爲, 經張秉權先生與作者檢查該龜板, 確是橫刻五劃, 絕非裂痕。但此字確是四字誤刻, 因按照此龜板上占卜的序數, 不可能是五。除此以上兩例, 作者所見, 甲骨文無五字作。

34. 圖版 丙編中二，圖版叁柒叁 (1~10)；甲1133，(100)；粹1586，(1000)；後下一九、八(10000)。
35. 郢鐘，大梁鼎。金文正續編，第十四、十六。
36. 卜辭總述，p. 109。
37. p. 378。
38. 甲骨文中所見的數，史語所集刊，四十六本，第三分，pp. 351-357。
39. K. M. p. 236; pp. 254-255。
40. D. S. p. 33。
41. D. S. p. 46。
42. D. S. pp. 47-48。
43. D. S. p. 65。
44. D. S. p. 44。
45. Carl B. Boyer, *A History of Mathematics*, 1968, pp. 28-29。
46. 同前，p. 13。
47. 尚書，呂刑。
48. 詩經周頌丰年。
49. 左傳昭公24年，引尚書太誓。
50. 國語鄭語，卷16 (四部備要)，p. 4b。
51. 算經 (商務)，冊四，p. 126。
52. 太平御覽，卷750，p. 3a，按：風俗通義原爲三十卷，宋時只剩十卷。引文，今本無。
53. 十三經注疏，卷13，p. 24a。按最後的千字，原文爲萬，誤。朱陳澧禮記集說云：「若以億言之，當云九千億畝，若以萬言之，當云九萬萬畝，經文誤也。」(香港啓明書局影印粹芬閣藏本，卷三，p. 81)。陳氏所論甚是，不然，則不合。
54. 金祥恆，甲骨文無十四月辨 (大陸雜誌，第33卷，第10期，pp. 11-13) 金氏認爲明義士殷墟卜辭1568片誤纂；前八、十一、三，三是兆序；在1492月旁之「丨」有骨紋，誤讀爲十四月。就作者仔細檢查原拓片，「丨」書法清晰，絕非骨紋。
55. 殷墟卜辭綜述，第七節。
56. 粹，75。
57. 佚，一九四。
58. 後下，四三、九。
59. Donald Smeltzer 稱十、百、千、萬等字爲 label (標記) (Man and Number p. 41.) Karl Menning, 稱 rank (順序), (number words and number symbols p. 450.) Needham, 則認爲是位值 (Place-Value), K. M. 有時亦稱爲 Place-value (p. 13)。
60. 蔡雲，談癖，卷2 p. 7b。
61. 陳鐵齋，一種古代常見的明刀，文物，1959 (1) p. 38。
62. 倪模，古今錢略 (光緒丁丑刊本)，卷5，p. 35。
63. 李佐賢，古泉匯，同治三年，1834年，享六，p. 2b。
64. 古錢匯，元七，pp. 1b-2a。見於壽陰、中都的尖足布；見元六、八，p. 8a, 5a。
65. 同前，元七，p. 4b。
66. 古泉匯，元六，p. 10a; 9b; 享六，p. 3a，明刀。
67. 古，元六，p. 14a。
68. 古泉匯，元五，p. 9a; 元六，p. 11b, 14b。
69. 古，元七，p. 2a。
70. 古，享八，p. 4b。

71. 古今錢略，卷4，p. 45a；卷5，p. 20b。
72. 劉心源，奇觚室吉金文述，光緒28年，卷13，趙刀一，p. 19a；卷14，趙刀二，p. 2b。
73. 古，元五，p. 3a；享五，p. 5a。
74. 古今錢略，卷5，p. 20b；古泉匯，享六，p. 4b。
75. 元五，p. 3a；元七，p. 9b。
76. 元六，p. 15a；元七，p. 6a。
77. 古錢大辭典上編，刀布類，p. 35a, 29b, 32b, 33b；古泉匯，享五，p. 4b，元六，p. 10a。
78. 乘，古梁字（馬昂，貨布文字考）（道光十二年），卷2，p. 3a。
79. 古，元一，p. 5b-6b。
80. 古，享五，p. 5b；古今錢略，卷4，pp. 9-10a；「丨」亦可能是一。
81. 𠄎，見古，元八，p. 9a；享六，p. 6a；享八，p. 6b-7a。
82. 古，元六，pp. 10a-19b，平周尖足布。
83. 古，元七，pp. 2b-4b，畿氏尖足布，𠄎，見元八，p. 2a。
84. 劉心源，奇觚室吉金文述，尋十九，方肩尖足布，p. 21。
85. 古今錢略，卷5，p. 16b，倪氏釋爲28。
86. 古錢匯，元七，p. 3b；元八，p. 5b；𠄎，李氏釋爲五十五，竊疑，非是。按李氏所舉同類畿氏尖足布中，就二位紀數而言，55當爲𠄎。
87. 安徽阜陽地區出土的楚國金幣，考古，1973（3）p. 164，據該文作者云，此等數字符號，可能屬於金幣的編號。
88. 古，享五，p. 6a, 7a。
89. 古，享五，p. 7b。
90. 古，享六，pp. 7a-8b。
91. 古，享九，pp. 16a-17b。
92. 二位數的貨布紀數，有表位值十者，就古泉匯所載，只有「關」字幣一枚，61作𠄎，元九，p. 3a。
93. D. S. Vol. II p. 156。
94. 同前，p. 160、165。
95. 同前，p. 165。
96. Smith, pp. 160-168。
97. 李儼，籌算制度考，燕京學報第六期，p. 1129-1130。
98. 楊寬，中國歷代尺度考（商務），p. 71。按：各家對漢尺之測定略有不同。足利喜六測定爲0.230公尺，合賴（Grenard）和侯門（Herrman），一漢尺=0.222公尺強。王國維於現存歷代尺一文舉出三個漢代尺度：一、劉歆銅尺長工部營造尺七寸二分，九英寸又十二分之一；二、漢牙尺長工部營造尺七寸二分六釐，九英寸又五分之一；三、後漢建初銅尺長工部營造尺七寸三分七厘，九英寸又二十四分之七。
99. 郭寶鈞，中國青銅器時代，1963，p. 106；又嚴敦傑，中國古代數學的成就，（1956年，北平，中華全國科學技術普及協會出版）p. 40，註5（原文誤作註7）；照文物參考資料 1954（12）所記，古墓出土的籤，每根是12公分。
100. D. S. Vol. II, pp. 172-173。
101. 圖見於 S. C. C. Vol. III p. 70。
102. 古算器考（藝海珠塵），p. 1b。
103. D. S. Vol. II, pp. 162-163。
104. 李約瑟主張日代表算板上的橫線，S. C. C. Vol. III p. 4。
105. 兩周金文辭大系，p. 110。

106. D. S. Vol. II pp. 158-167。
107. 大陸雜誌，54卷，5期，pp. 238-250，民國六十六年，五月。
108. 四庫全書，卷6，pp. 7a-8b。
109. 十三經注疏，嘉慶二十年，阮元審定本。卷40，pp. 3b-4a，左傳本文作「二萬二千六百有六旬也」，二千之二，當爲六，今據阮氏校勘記，改正。
110. 金文編上（第十四，p. 43-），亥字共有53個，以二爲首的亥字有24個，可以拆成三個六（ 𠄎 ）的有23個。
111. 張謇，金石大字典，卷2，p. 30。李書華，籌算與珠算（慶祝董作賓先生六十五歲論文集，p. 332，民國49年，臺北。）引梅文鼎古算器考云：「亥字……春秋時有此字體“𠄎”」。按：此字不見於金文編，梅氏古算器考（藝海珠塵）亦未見此字，不知李氏何所本。
112. 譚戒甫，墨經易解，p. 317，位，原文是住；譚氏照曹耀湘校改。
113. Needham，將「一有五焉」，釋爲算籌一在數碼T(6)中有代表5者，（按：指「 𠄎 」而言）。筆者認爲此種解說甚爲牽強。
114. 劉心源，奇觚室吉金文述，頁十四，p. 32b，居延漢簡圖版之部，81葉有一二三三𠄎，又39葉有八個 𠄎 ，不知是否爲算籌六的符號。
115. 四庫全書（中華），卷四，p. 11a。
116. *Number Words and Number Symbols* p. 372; Smith, pp. 180-185。按 Albert 所用的算子與歐洲一般所用者不同：Albert 的算子爲角製，其上寫1-9的數字，因此有人主張，Albert 受到西班牙的阿拉伯人的影響。見 F. C. p. 114, 118。
117. *Number Words and Number Symbols*, pp. 300-302, Fig. 129。
118. 四庫全書，卷上，p. 11a。
119. 同上，卷上，p. 3a。
120. 卷23，p. 1。
121. 中國天文史上的一個主要發現，文物，1974（11）p. 28, 34。
122. Man and Number, pp. 36-37。
123. D. S. pp. 65-66; K. M., p. 50。按關於印度碑銘紀數的時代，甚難確定。Needham 主張，印度位值的發生在公元第五世紀以前；Kaye的說法，不能早過第八世紀，（S. C. C. vol. III pp. 10-11）；而錢寶琮，認爲是在第六世紀（數史，p. 109）。
124. *Number Words and Number Symbols*, p. 53。
125. 同上，p. 452，此種情形，僅指國語而言（語言學家丁邦新先生見告）。
126. F. C. p. 145。
127. Smith, pp. 157-158。
128. 見敦煌卷子，立成算經，首頁（Stein Rolls No. 930 史語所影印本，第27函，108冊）。
129. 郭氏，奴隸時代，p. 36。
130. F. Cajori, p. 26。
131. 卷十，p. 7b。
132. 卷14，p. 3a。
133. 鄭司農的注云：「九數：方田、粟米、衰分、少廣、商功、均輸、方程、贏不足、旁要」（卷14，p. 3a）。鄭氏所論不實，蓋鄭注是以九章算術之內容爲依據，此書除了複雜的算術外，還有代數和幾何，是一部水準很高的數學專著。其中較易者，亦不適於作兒童教材。
134. 高平子，學曆散論，p. 45; S. C. C. Vol. III, p. 20。
135. 錢著，中國數學史，pp. 29-30；李著，簡史，p. 36。
136. 李著，簡史，p. 45。
137. 數史，p. 14。

138. 算經冊一，p. 63。
139. 數史，p. 33。
140. 卷上，p. 1。
141. 算經，第三冊，卷上，p. 7b。
142. 兩周金文辭大系，釋文，p. 979a。倍，嚴可均釋；而郭氏釋付。
143. 卷24上，p. 1125，標點本（鼎文）。
144. 羅振玉，流沙瑣簡，小學方技書，p. 5a（圖版）；考釋一，pp. 9b-10a。
145. 漢魏叢書，冊二，p. 9。
146. 漢魏叢書，卷8，p. 10b。
147. 漢書，卷67，標點本，p. 2920；三國志，卷21，標點本（鼎文出版），p. 615。
148. 卷1，p. 1b，四部備要。
149. 卷19，pp. 1a-2b，四部備要。關於地員篇的年代，近人有不同的見解。郭氏認為戰國農家之言（管子校釋，p. 900），友丁則主張是漢武帝時代的作品，見管子度地篇探微，農史研究集刊（1959年）p. 1。
150. 卷6，制樂，p. 15a。許維通，呂氏春秋集釋，世界書局出版。
151. p. 2b。
152. 荀子集解（世界），卷27，p. 327。
153. 卷22，p. 12b。
154. 四部備要本，卷3，p. 13b。
155. 最原始的分數，可能是指一個單位量以下的量，如一斗、一日是一個單位量，以一升、一個時辰就是分數 $\frac{1}{40}$ 、 $\frac{1}{42}$ ，此即所謂古代的單位分數之由來。參看 Smith, Vol. II, pp. 208-209。
156. 卷下，p. 41，商務，算經十書。
157. 尹仲容校釋，卷16、22，p. 175, 222。
158. 董作賓，中國古代文化的認識（大陸雜誌），三卷，12期，p. 28。
159. 天文訓（卷3）「二十九日九百四十分日之四百九十九而為月」（世界，p. 42）。
160. 今本十一家注孫子，河洛圖書出版社，p. 110。
161. 十三經注疏，卷5上，p. 7a。嘉慶二十年，阮元審定。
162. 墨子，卷1，p. 9a，四部備要。
163. 兩周金文辭大系，釋文，pp. 250b-251a。馬承源照原器物錄下的銘文，與郭氏不同之處：「齊遷（率）卿大夫（合文）來聘」。見馬承源，商鞅方升和戰國量制，文物，1972（6）p. 17。
164. 同前註。
165. 卷39，p. 13a，四部備要。
166. 卷39，p. 11a，四部備要。
167. 卷18，p. 6b, 8b，卷21，p. 19b，四部備要。
168. 卷19，pp. 5b-6b，四部備要。
169. 四部備要，秦策三第五，p. 7b。
170. 中山第三十三，p. 6a。
171. 此段係由錢著數學史（p. 14）加以補充和修改，第三條改動的較多。
172. 卷39，p. 13b，四部備要。
173. 錢氏原文，n-1, 1；今改 n-p, p。
174. 卷39，p. 9b，四部備要。
175. 卷41，pp. 5b-6a，四部備要。
176. 卷81，p. 1，四部備要。

177. 備要，卷32，p. 2b。
178. 按：齊國古量，一釜是六斗四升，即64升。左傳昭公三年：「齊舊四：豆、區、釜、鍾。四升爲豆，各自其四以登於釜。」漢書律曆志(上)：「十合爲升，十升爲斗，十斗爲斛。」一斛即一釜。管子中量的單位，必須爲十進；否則不合。
179. 史料，p. 6，第一版。
180. 卷22，p. 4，卷23，p. 3b。
181. 冊一，卷下，p. 53，算經十書(商務)。
182. 數史，p. 29。
183. 馬非白主張輕重篇是王莽時代理財學家的著述。見關於管子輕重篇的著作年代問題，歷史研究，1956(12) p. 29。郭氏則認爲著於文景之世。見管子集校，校畢書後，p. 2。
184. 商鞅量與商鞅量尺，國立北京大學，國學季刊，第五卷，第四號，p. 120。
185. 同上，p. 123。
186. 馬承源，商鞅方升和戰國量制，文物，1972(6) p. 17。
187. 錢著，數史，p. 126。
188. F. Cajori, pp. 20-21，又 Smith 云，古巴倫也有普通分數(General Fraction)，如 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{2}{18}$ 、 $\frac{4}{18}$ 、 $\frac{5}{6}$ ，Vol. II, p. 213。
189. Smith, p. 213。
190. 卷19，p. 2a。
191. 史料，p. 6。
192. 史料，p. 6。
193. 說庫，卷二，p. 2a。
194. 卷8，劉徽注，p. 48，(算經，冊二)。
195. 卷上，pp. 23-27。
196. S. C. C Vol. III, pp. 256-257，陳遵媯則認爲「七衡圖」的成立，大概在秦呂不韋以及到西漢末的揚雄時候，中國古代天文學簡史，(1955) p. 163。
197. 卷下，pp. 39-41。
198. 史料，p. 5。
199. 莊子(四部集要)，卷10，p. 23b。
200. Smith, pp. 270-271。
201. 西安半坡，(1963) p. 19, 27。
202. 西安半坡，圖版 163。
203. 蘭州新石器時代的文化遺存，考古學報，1957(1) 圖版叁。
204. Smith, p. 273。
205. 卷上，p. 2。
206. 卷上，p. 15。
207. 秦嘉謨輯，世本八種，張嗣粹集補注本，p. 16。
208. 墨子天文志上、經上，孟子離婁上、盡心下，莊子徐無鬼，韓非子有度第六，周禮冬官與人。
209. 卷18，p. 314；清王先謙，荀子集解，世界本。
210. (1) 漢武梁祠，(2) 漢規矩碑圖，(3) 東漢石刻，(4) 高昌墳墓內神像圖，(5) 高昌阿斯塔那墓室彩色絹畫。史料，p. 8，第二版。又第二個規形，乃作者照唐朝高昌墓出土的畫像。見陳遵媯，中國天文學簡史，p. 75，圖20。
211. 卷40，pp. 6b-7b，四部備要。

212. 卷41, p. 5a。
213. 卷42, pp. 4b-5a。
214. 卷80, p. 14b。
215. 卷78, p. 5a。
216. 卷78, p. 7a。
217. 卷80, p. 14a。
218. 錢氏, 中國數學史, p. 15, 民國52年(1963)。
219. 卷40, p. 6b。
220. 王獻唐, 齊國刀幣的三個階段, 考古學報, 1963 (11) p. 263。
221. 梓溪, 青銅器名辭解法, 文物, 1958 (12) p. 58。
222. 卷42, p. 15a。
223. 數史, p. 15。
224. 簡史, p. 33。
225. 卷上, p. 7。
226. 卷上, p. 7。
227. 見勵乃驥, 新嘉量五量銘釋, 國學季刊, 第五卷, 第二號(24年), p. 78, 李儼先生的解釋:「直角三角形固定弦, 其直角點的軌跡便是圓」(見史料, p. 9)。竊謂, 李說不如勵說更合原意。即使李說對, 似乎應改成:「固定弦的中點, 其直角頂點的軌跡便是圓。」
228. 卷上, p. 21。
229. 周髀算經中的原圖(不知是何時的圖)與本文所述恰相反, 誤。
230. 卷上, p. 24。
231. 卷上, pp. 9-10。
232. 卷上, p. 7。
233. 卷上, p. 1。
234. 卷上, p. 10。
235. 見趙爽, 勾股圓方圖。周髀, 卷上, pp. 2-3。
236. 數史, p. 32; 簡史, p. 47。
237. 簡史, p. 48。
238. 數史, p. 33。
239. 數史, p. 32。
240. 卷1, (冊一), pp. 67-68。
241. p. 73。
242. p. 75。
243. p. 76。
244. p. 76, 79。
245. 史料, p. 11。
246. 十三經注疏, 卷16, p. 14b。
247. 第十三篇下 p. 12a (世界影印)
248. 卷5, p. 69 (商務)
249. 紫溪, 古代量器小考, 文物, 1964 (7) p. 42。
250. 按實測方升三邊的長爲 7, 12.5, 2.3 厘米, 如取 2.3厘米爲 1 寸, 則方升的長和寬都超過 3 寸和 5.4 寸, 它的容積比 $16\frac{1}{2}$ 立方寸略大。

251. 數史，p. 16。
252. 墨經的標號〔 〕和其中的號碼是根據譚成甫之墨經易解。
253. 經與說依錢氏改。數史，p. 17。
254. S. C. C.，p. 92。
255. 墨經易解，p. 77。
256. Smith, Vol. II, p. 281。
257. 算經，冊二，p. 125。
258. 簡史，p. 27。
259. pp. 135-136。
260. pp. 151。
261. 墨經易解，p. 149。
262. 李漁叔，墨辯新注（57年，商務出版），p. 90；錢著，數史，p. 17；李著，簡史，p. 27。
263. 數史，p. 19，
264. p. 141。
265. 墨子閒詁，卷10，p. 30。
266. S. C. C. Vol. III, p. 93。
267. p. 136。
268. S. C. C. Vol. III, p. 94。
269. 中國古代哲學史，p. 84。
270. 同前註。
271. S. C. C., Vol. III, p. 94。
272. 見數史，錢氏引。
273. 郭氏，十批判書，1956，pp. 264-265。
274. 數史，p. 20。
275. 數史，p. 20。
276. 數史，p. 21。
277. 簡史，pp. 28-29。
278. 九章算術，卷一，p. 77。
279. 莊子天下篇，p. 220。
280. S. C. C. p. 15。按三上義夫的原文：「常用之文句，多以連想為基礎，用連鎖的敘述」。（見中國數學的特色，林科棠譯，p. 83，商務，民18年出版）。
281. 史記曆書：「幽厲之後，周室微，陪臣執政，史不記時，君不告朔，故囑人子弟分散。」又淮南子人間訓：「（魏）文侯……解扁東封，上計而入三倍。」
282. 數史，p. 33。